

# Appunti di teoria magnetoionica

Corso Monografico Sperimentale della Laurea Specialistica in Fisica, indirizzo  
Geofisico – Dipartimento di Fisica dell’Università “La Sapienza” di Roma

Michael Pezzopane

*Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia*  
michael.pezzopane@ingv.it

# Indice

<b>0. Richiami sulle onde elettromagnetiche</b>	pag. 1
<b>1. Equazione di Altar-Appleton: approccio macroscopico</b>	pag. 5
<b>2. Assorbimento secondo la teoria macroscopica</b>	pag. 20
<b>3. Interpretazione grafica dell'equazione di Altar-Appleton in assenza di collisioni</b>	pag. 25
3.1 <i>Assenza di un campo magnetico esterno</i>	pag. 25
3.2 <i>Presenza di un campo magnetico esterno: propagazione longitudinale</i>	pag. 26
3.3 <i>Presenza di un campo magnetico esterno: propagazione trasversale</i>	pag. 28
3.4 <i>Presenza di un campo magnetico esterno: caso generale</i>	pag. 29
<b>4. La polarizzazione delle onde</b>	pag. 36
<b>5. Approssimazioni quasi longitudinale (QL) e quasi trasversale (QT)</b>	pag. 44
5.1 <i>Approssimazioni QL e QT nel caso <math>X=1</math></i>	pag. 45
5.2 <i>Approssimazioni QL e QT nel caso <math>X \neq 1</math></i>	pag. 46
5.3 <i>Regioni QL e regioni QT in un modello di ionosfera</i>	pag. 47
5.4 <i>Relazione tra l'espressione di <math>n</math> in approssimazione QT e quella relativa al caso di assenza di campo magnetico</i>	pag. 48
<b>6. Effetto delle collisioni sulle curve per <math>\mu</math> e <math>\chi</math></b>	pag. 49
6.1 <i>Approssimazioni per piccoli valori di <math>Z</math> e condizione di riflessione</i>	pag. 53
6.2 <i>Condizioni di riflessione dove <math>X=1</math> quando <math>Z^2 \gg 1</math></i>	pag. 55
6.3 <i>Risultati per l'approssimazione QL</i>	pag. 56
6.4 <i>Approssimazione QT dove <math>X=1</math>, segno superiore</i>	pag. 57
6.5 <i>Considerazioni finali</i>	pag. 57
<b>7. Velocità di gruppo</b>	pag. 59
7.1 <i>Assenza di un campo magnetico esterno</i>	pag. 59
7.2 <i>Presenza di un campo magnetico esterno</i>	pag. 59
<b>8. Applicazioni alla ionosfera terrestre: un modello di ionosfera senza campo magnetico</b>	pag. 64
8.1 <i>Frequenza di penetrazione</i>	pag. 65
8.2 <i>Altezza di riflessione</i>	pag. 65
8.3 <i>Altezza equivalente di riflessione</i>	pag. 66
8.4 <i>Assorbimento dell'onda</i>	pag. 66
8.4.1 <i>Assorbimento non-deviativo</i>	pag. 67
8.4.2 <i>Assorbimento deviativo</i>	pag. 68
<b>9. Applicazioni alla ionosfera terrestre: un modello di ionosfera con campo magnetico</b>	pag. 69
9.1 <i>Triplo splitting e raggio Z</i>	pag. 73
9.2 <i>Frequenze basse e ionosfera bassa</i>	pag. 76

<b>10. Onde in una miscela di ioni ed elettroni</b>	pag. 78
<i>10.1 L'indice di rifrazione della miscela</i>	pag. 78
<b>11. Calcolo dell'indice di rifrazione usando la notazione tensoriale</b>	pag. 81

## Appendice

<b>A.1 Frequenza di plasma</b>	pag. 84
<b>A.2 Girofrequenza</b>	pag. 85
<b>A.3 Velocità di fase e velocità di gruppo</b>	pag. 85
<b>A.4 Lunghezza di Debye</b>	pag. 87

## 0. Richiami sulle onde elettromagnetiche

Un *plasma* è un gas ionizzato e complessivamente neutro, ossia costituito da elettroni (ed eventualmente ioni negativi) e ioni positivi, con uguale densità, ed eventualmente atomi e molecole neutre. La ionosfera può essere assimilata ad un *magnetoplasma*, ossia un plasma (benché minoritario, in quanto immerso in una ancor densa atmosfera neutra) in presenza di un campo magnetico costante (o al più lentamente variabile rispetto al periodo delle onde elettromagnetiche considerate).

La *teoria magnetoionica* studia proprio la propagazione delle onde elettromagnetiche attraverso un mezzo di questo tipo.

Alla teoria magnetoionica vera e propria si premettono alcune importanti considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche, nel vuoto e in un generico mezzo materiale. A tal proposito si considera un sistema di riferimento cartesiano ortogonale ( $x, y, z$ ) nel quale rappresentare i fenomeni elettrici e magnetici mediante i vettori *intensità del campo elettrico*  $\mathbf{E}$  e *induzione del campo magnetico*  $\mathbf{B}$ , o *intensità del campo magnetico*  $\mathbf{H}$  (legato a  $\mathbf{B}$  dalla relazione  $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ , dove  $\mu$  è la *permeabilità magnetica assoluta*). Le relazioni che legano questi due vettori sono espresse dalle *equazioni di Maxwell*

$$(0.1) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}}, \end{cases}$$

dove  $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$  è l'*induzione dielettrica*,  $\epsilon$  la *costante dielettrica* (o *permittività elettrica assoluta*),  $\rho$  la *densità volumica di carica elettrica libera*,  $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$  la *densità di corrente* e  $\sigma$  la *conduttività*.

Le tre costanti del mezzo  $\epsilon, \mu$  e  $\sigma$  sono in genere grandezze tensoriali e questo significa che i vettori  $\epsilon\mathbf{E}$ ,  $\sigma\mathbf{E}$ ,  $\mu\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}/\mu$  possono avere orientamento diverso dai vettori  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$ . Se il mezzo è però *isotropo*, cioè non esistono direzioni particolari o privilegiate, le tre costanti sono grandezze scalari; inoltre se il mezzo è *omogeneo*, le tre costanti hanno il medesimo valore in ogni punto del mezzo e i vettori  $\epsilon\mathbf{E}$ ,  $\sigma\mathbf{E}$ ,  $\mu\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}/\mu$  hanno quindi lo stesso orientamento dei vettori  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$ . Per un mezzo omogeneo ed isotropo le (0.1) assumono quindi la forma

$$(0.2) \quad \begin{cases} (a) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \\ (b) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ (c) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{H}}, \\ (d) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \dot{\mathbf{E}}. \end{cases}$$

Si consideri adesso un mezzo omogeneo, isotropo, dove non sono presenti cariche libere ( $\rho=0$ ), elettricamente non conduttore ( $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}=0$ ), e all'interno del quale i campi elettrico e magnetico variano unicamente lungo la direzione  $z$  (il che implica  $\partial/\partial x=\partial/\partial y=0$ ), che si ritiene essere la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica.

Prendendo il rotore della (0.2.d) e considerando la (0.2.c) si ottiene

$$(0.3) \quad \text{rotrot}\mathbf{H} = \varepsilon \text{rot}\dot{\mathbf{E}} = -\varepsilon \mu \ddot{\mathbf{H}}.$$

Ora dato un vettore  $\mathbf{F}$  si ha

$$(0.3.1) \quad \text{rotrot}\mathbf{F} = \text{graddiv}\mathbf{F} - \text{divgrad}\mathbf{F};$$

se il vettore in questione è  $\mathbf{H}$  allora  $\text{div}\mathbf{H}=0$  (il che è vero solo per un mezzo omogeneo ed isotropo) e quindi la (0.3.1) si riduce alla

$$(0.3.2) \quad \text{rotrot}\mathbf{H} = -\text{divgrad}\mathbf{H}.$$

Ora dato un campo vettoriale  $\mathbf{a}(x, y, z)$ , il corrispondente gradiente è

$$(0.3.3) \quad \text{grad}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} & \frac{\partial a_y}{\partial z} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

che è un tensore del secondo ordine, la cui matrice rappresentativa contiene le derivate parziali delle componenti del campo vettoriale; se ad  $\mathbf{a}$  si sostituisce  $\mathbf{H}$ , che si è ipotizzato variare solo lungo la direzione  $z$ , si ottiene

$$(0.3.4) \quad \text{grad}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} & \frac{\partial H_y}{\partial z} & \frac{\partial H_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

e quindi

$$(0.3.5) \quad \text{divgrad}\mathbf{H} = \nabla^2\mathbf{H} = \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \hat{j} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \hat{k}.$$

La (0.3) considerando la (0.3.5) diventa allora

$$(0.4) \quad \nabla^2\mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Ora

$$(0.5) \quad \text{div}\mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

e, ricordando ancora una volta che  $\mathbf{H}$  varia solo lungo la direzione  $z$ , dalla (0.5) segue che

$$(0.6) \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow H_z = \text{cost} = 0;$$

se a questo punto si sceglie il sistema di riferimento in modo tale che  $H_x=0$ , l'equazione vettoriale (0.4) si riduce alla seguente equazione scalare (proiezione della (0.4) sull'asse  $y$ )

$$(0.7) \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2},$$

che rappresenta l'*equazione delle onde* (o più correttamente l'*equazione del moto ondoso*) per un'onda che si propaga lungo la direzione  $z$  con *velocità di fase*  $v=[1/(\epsilon\mu)^{1/2}]$  (nel vuoto tale velocità corrisponde con la velocità della luce  $c$  e vale  $[1/(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}]$ , dove  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  sono la *permittività elettrica* e la *permeabilità magnetica del vuoto*). Analogamente per la componente  $E_x$  del campo elettrico avremmo trovato la seguente equazione

$$(0.7.1) \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

La soluzione generale della (0.7) è

$$(0.7.2) \quad H_y(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt),$$

dove  $F(z-vt)$  e  $G(z+vt)$  rappresentano rispettivamente un'onda che si muove in avanti e un'onda che si muove all'indietro ( $F$  e  $G$  sono degli opportuni operatori funzionali dell'argomento in parentesi). Soluzioni del tipo (0.7.2) si ottengono se si considera un punto  $P$  a distanza piuttosto grande da una sorgente puntiforme, lungo la direzione di propagazione, e se si considera una non grande estensione di spazio intorno a  $P$ ; le componenti di  $\mathbf{E}$  (e quindi di  $\mathbf{H}$ ) hanno una determinazione che dipende, oltre che dal tempo  $t$ , soltanto dalla distanza, e tale determinazione è la stessa in tutti i punti (non eccessivamente distanti da  $P$ ) di piani ortogonali alla direzione di propagazione: è il caso delle *onde piane*, ossia onde che hanno un *fronte d'onda* (luogo dei punti di uguale fase) piano.

Una soluzione particolare dell'equazione delle onde (0.7) è rappresentata dal caso dell'*onda armonica*

$$(0.7.3) \quad H_y = A \sin(\omega t - (kz + \psi)),$$

quando la dipendenza dal tempo di  $\mathbf{H}$  (e analogamente di  $\mathbf{E}$ ) è espressa da una funzione sinusoidale; questo vuol dire che gli operatori  $F$  e  $G$  della (0.7.2) sono il prodotto di una costante per la funzione seno. Nella (0.7.3)  $A$  rappresenta l'*ampiezza*;  $(\omega t - (kz + \psi))$  è la *fase* all'istante  $t$  e a distanza  $z$  dall'origine;  $(kz + \psi)$  è la *fase iniziale locale*, cioè a distanza  $z$  e all'istante in cui si prende  $t=0$ ;  $\omega=2\pi f=2\pi/T$  è la *pulsazione* (ossia la variazione della fase nell'unità di tempo);  $\psi$  è la *fase iniziale all'origine*, cioè la fase all'istante  $t=0$  e a distanza  $z=0$ ;  $k=2\pi/\lambda$  è il *coefficiente di fase* o *numero d'onda*, che rappresenta lo sfasamento corrispondente ad un cammino pari all'unità di lunghezza;  $\lambda$  è la *lunghezza d'onda*, cioè la lunghezza percorrendo la quale la fase varia di  $2\pi$ . È ovvio che con un'opportuna scelta dell'istante iniziale, può sempre rendersi  $\psi=0$  e in questo caso la fase iniziale locale coincide con  $kz=(2\pi/\lambda)z$ , cioè con la variazione di fase relativa al cammino  $z$ . La (0.7.3) può anche essere considerata come la parte reale di

$$(0.7.4) \quad H_y = A \exp^{i(\omega t - (kz + \psi))},$$

in quanto gli esponenziali complessi sono molto più semplici da maneggiare.

Sempre considerando un mezzo omogeneo e isotropo, dove non sono presenti cariche libere ( $\rho=0$ ), elettricamente non conduttore ( $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}=0$ ) e all'interno del quale i campi elettrico e magnetico variano unicamente lungo la direzione  $z$ , dopo aver dimostrato la natura ondosa della perturbazione elettromagnetica, se ne dimostra adesso la trasversalità e l'ortogonalità; scegliendo quindi un sistema di riferimento in cui  $E_y=E_z=0$  le (0.2.c) e (0.2.d) vengono proiettate lungo le tre direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$

$$(0.8) \quad \begin{cases} (a) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ (b) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ (c) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

$$(0.9) \quad \begin{cases} (a) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ (b) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ (c) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Le (0.8) e (0.9) ci dicono che le uniche componenti di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  che variano nel tempo e nello spazio sono la  $E_x$  e la  $H_y$ , e di conseguenza che  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione  $z$ .

Vale la pena qui precisare che si parla di onda piana quando il fronte d'onda è piano e di *onda polarizzata piana* quando  $\mathbf{E}$  è  $\mathbf{H}$  si trovano su un piano; i due piani in questione possono però non coincidere, come è il caso dell'onda acustica in cui l'oscillazione avviene lungo la direzione di propagazione e quindi ortogonalmente al fronte d'onda.

Inoltre si è appena visto che un'onda elettromagnetica, nel vuoto o in un mezzo omogeneo e isotropo, ha una polarizzazione piana con piano di polarizzazione ortogonale alla direzione di propagazione; vedremo che per un mezzo conduttore immerso in un campo magnetico (quindi in un mezzo non isotropo elettricamente quale è la ionosfera) l'onda non è più polarizzata piana ma esce fuori una componente  $E_z$  lungo la direzione di propagazione; non si parla più quindi di polarizzazione piana ma spaziale.

## 1. Equazione di Altar-Appleton: approccio macroscopico

Se il plasma è investito da un'onda elettromagnetica, il campo elettrico  $\mathbf{E}$  dell'onda interagisce con gli elettroni, sottoponendoli ad una forza  $\mathbf{F}=e\mathbf{E}$ . Ciascun elettrone messo in movimento dal campo elettrico rappresenta quindi una carica accelerata e irradia energia elettromagnetica. L'elettrone può essere visto anche come una piccola corrente elettrica oscillante che ha assorbito energia dal campo elettrico dell'onda incidente e irradia un'onda elettromagnetica con la stessa frequenza, ma con diversa fase. L'onda elettromagnetica che è irradiata dal singolo elettrone si propaga su un fronte d'onda con superficie quasi sferica, il cui centro è l'elettrone stesso. Queste onde sferiche interferiscono tra di loro privilegiando una certa direzione dove vi è interferenza costruttiva. In generale, se il mezzo non è omogeneo, l'effetto netto che si rivela è un cambiamento della direzione di propagazione dell'onda incidente che è deviata da regioni ad alta densità elettronica verso regioni a bassa densità. L'intensità di tale effetto dipende dall'ampiezza delle oscillazioni, quindi dall'intensità del campo elettrico  $\mathbf{E}$  e dalla frequenza dell'onda incidente, e dalla densità elettronica  $N$ . Inoltre, la polarizzazione dei campi elettrici e magnetici irradiati dagli elettroni in vibrazione differisce dalla polarizzazione dei campi dell'onda incidente a causa della presenza del campo magnetico terrestre. Come vedremo, il campo magnetico terrestre produce perciò un'anisotropia per la quale onde elettromagnetiche uguali, provenienti da diverse direzioni o dalla stessa direzione ma con differente polarizzazione, subiscono una diversa interazione con il mezzo.

In questo paragrafo si vuole calcolare la relazione di dispersione, e quindi l'indice di rifrazione, per onde elettromagnetiche che si propagano in un magnetoplasma. Se considerassimo un magnetoplasma qualunque la trattazione sarebbe piuttosto complicata; si fanno pertanto le seguenti ipotesi semplificatrici:

- assenza di cariche localizzate ( $\rho=0$ );
- l'interazione tra il magnetoplasma e le onde elettromagnetiche è rappresentata dal vettore di polarizzazione  $\mathbf{P}$  (che per un mezzo omogeneo ed isotropo è pari a  $\mathbf{P}=\epsilon_0\chi\mathbf{E}$ , dove  $\chi$  è la *suscettività elettrica* che in questo caso risulta essere una costante, mentre per un mezzo qualsiasi è un tensore);
- campo magnetico esterno  $\mathbf{H}_0$  uniforme;
- le proprietà magnetiche sono quelle del vuoto, quindi  $\mu=\mu_0$ ;
- viene considerato unicamente il moto degli elettroni. Il campo elettrico di un'onda che penetra nel plasma ionosferico esercita una forza sugli elettroni e sugli ioni del plasma. Gli ioni mediamente hanno una massa che è  $3 \cdot 10^4$  volte quella degli elettroni, e a causa della loro inerzia tendono a rimanere nelle loro posizioni, mentre gli elettroni sono posti in vibrazione e seguono le oscillazioni del campo elettrico;
- si trascurano le collisioni tra gli elettroni e le particelle pesanti (particelle neutre e ioni);
- si considera un magnetoplasma cosiddetto “freddo”, ossia il moto termico degli elettroni viene trascurato. In realtà, le velocità impresse alle particelle dalle onde elettromagnetiche di nostro interesse (con frequenza dell'ordine del MHz) sono dell'ordine di circa  $10^2$  m/s, mentre le velocità indotte dall'agitazione termica sono, per gli elettroni, dell'ordine di circa  $10^5$  m/s. In queste condizioni l'approssimazione di plasma freddo sembra non potersi applicare. Però, se si pensa che la velocità vettoriale media dell'agitazione termica è praticamente nulla, è ancora corretto parlare di plasma freddo.

---

NOTA: Sia  $\mathbf{P}$  che  $\mathbf{J}$  possono essere usati per descrivere lo stato degli elettroni (e degli ioni) nella ionosfera, e entrambi contribuiscono sia alle correnti di conduzione che a quelle di spostamento (per una trattazione quantitativa di questo aspetto si rimanda al Budden, *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press, 1966). È anche importante notare che, considerato che  $\mathbf{P}=N\mathbf{e}\mathbf{r}$  (vedi (1.1)), le due grandezze  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{P}$  sono legate tra loro dalla relazione

$$\mathbf{J} = N\mathbf{e}\mathbf{v} = Ne \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

il che, rappresentando  $\mathbf{P}$  un movimento di cariche oscillanti, equivale a considerare una densità di corrente  $\mathbf{J}$  oscillante.

Quindi per quanto concerne l'interazione tra il magnetoplasma e le onde elettromagnetiche, possiamo liberamente considerare il mezzo o come un conduttore (nel qual caso vi è una corrente di conduzione  $\mathbf{J} \neq 0$ ), o come un mezzo polarizzabile in cui il movimento delle cariche è incluso nel termine di polarizzazione  $\mathbf{P}$ . La cosa importante da capire è che non è possibile fare entrambe le cose.

La definizione  $\mathbf{P}=N\mathbf{e}\mathbf{r}$  è piuttosto ambigua in quanto  $\mathbf{r}$  non può essere specificato e sarebbe impossibile immaginare un esperimento dedicato alla misura di  $\mathbf{P}$  in un certo punto; al contrario, la velocità ha un significato ben preciso ed un esperimento per misurare la quantità  $\mathbf{J}=Ne(d\mathbf{P}/dt)$  può essere fatto facilmente. In realtà, quindi, la teoria dovrebbe essere formulata secondo  $\mathbf{J}$ , ma  $\mathbf{P}$  nelle equazioni di Maxwell appare solo attraverso la derivata rispetto al tempo, e quindi l'ambiguità viene rimossa. Si usa  $\mathbf{P}$  perché la matematica che ne consegue risulta essere più concisa.

---

In un *approccio di tipo macroscopico* si suppone che il numero di elettroni contenuto all'interno di un cubo di volume  $\lambda^3$  (dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica che si propaga nel mezzo) sia così grande da poter essere assimilato ad una distribuzione continua di carica il cui movimento è quindi equivalente ad una distribuzione continua di corrente (il che è corretto per le onde elettromagnetiche di nostro interesse che hanno frequenza dell'ordine del MHz e quindi lunghezze d'onda dell'ordine del metro). Considerando l'effetto che una distribuzione continua di carica ha su un'onda elettromagnetica, una quantità molto importante è la polarizzazione  $\mathbf{P}$  definita come il momento di dipolo indotto per unità di volume del mezzo. Questa quantità può essere relazionata al movimento degli elettroni nel modo seguente. Il movimento di un elettrone da un punto A ad un punto B si può rappresentare lasciando l'elettrone in A e aggiungendo un dipolo (Figura 1.1) in modo da annullare la carica originale in A; se ci sono  $N$  elettroni per unità di volume e se tutti si muovono di una stessa distanza  $\mathbf{r}$ , l'equivalente momento di dipolo per unità di volume, che rappresenta appunto la polarizzazione  $\mathbf{P}$  del mezzo, è dato da:

(1.1) 
$$\mathbf{P} = N\mathbf{e}\mathbf{r},$$

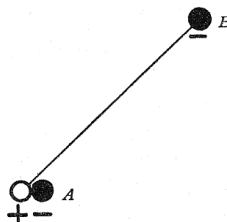


Figura 1.1

dove  $e$  è la carica elettrica associata all'elettrone.

Il movimento degli elettroni, e quindi la polarizzazione  $\mathbf{P}$ , è causato dal campo elettrico  $\mathbf{E}$  dell'onda elettromagnetica e, in mancanza di un campo magnetico applicato,  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{E}$  risultano paralleli; si parla in questo caso di un mezzo *isotropo*. Lo spostamento  $\mathbf{r}$ , e quindi la polarizzazione  $\mathbf{P}$ , sono entrambi proporzionali ad  $\mathbf{E}$

$$(1.2) \quad \mathbf{P} = \sigma \mathbf{E},$$

dove  $\sigma$  è una quantità scalare detta *polarizzabilità del mezzo* (da non confondere con la conduttività elettrica precedentemente definita).

In presenza di un campo magnetico gli elettroni non necessariamente si muovono lungo la direzione di  $\mathbf{E}$  e quindi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}$  possono non essere paralleli; si parla in questo caso di mezzo *non isotropo*. Inizialmente considereremo il caso di un mezzo isotropo.

Si suppone adesso che l'onda elettromagnetica che si propaga attraverso il mezzo sia di tipo sinusoidale  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ , dove  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  è l'*ampiezza dell'onda* (e analogamente per il campo magnetico  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\omega t)$  con  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ ),  $\omega$  è la *frequenza angolare dell'onda* e  $\mathbf{k}$  il *vettore d'onda* (un vettore che ha come ampiezza il valore  $2\pi/\lambda$  e come direzione e verso quelli della propagazione dell'onda). Si suppone inoltre, come inizialmente ipotizzato, che il movimento degli ioni positivi (in quanto molto più pesanti degli elettroni) possa essere trascurato e che gli elettroni non collidano con altre particelle; sotto queste condizioni l'equazione del moto di un singolo elettrone è:

$$(1.3) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone.

L'equazione (1.3) è vera a condizione che il movimento degli elettroni circostanti non influenzi il moto del singolo elettrone, e trascurando la forza di Lorentz dovuta al campo magnetico dell'onda elettromagnetica. Nel caso in cui il moto di un elettrone fosse influenzato dagli elettroni circostanti sarebbe necessario includere nella (1.3) un altro termine detto "termine di Lorentz".

Dalla (1.3) (per integrazione e considerando l'onda elettromagnetica sinusoidale definita poco fa) si ricava

$$(1.4) \quad \mathbf{r} = (-e/m\omega^2)\mathbf{E},$$

e sostituendo la (1.4) nella (1.1) si ottiene

$$(1.5) \quad \mathbf{P} = (-Ne^2/m\omega^2)\mathbf{E}.$$

Confrontando la (1.5) con la (1.2) si vede che la polarizzabilità del mezzo è data da

$$(1.6) \quad \sigma = -Ne^2/m\omega^2;$$

la polarizzabilità negativa sta a significare che cariche libere sottoposte ad un campo elettrico alternato sono spostate in una direzione che è equivalente a quella di un dipolo oscillante in antifase rispetto al campo responsabile di tale spostamento.

Le equazioni (1.2) e (1.6) che esprimono il comportamento di un mezzo continuo sono chiamate le *relazioni costitutive del mezzo*. A questo punto si vuole mettere in relazione  $\sigma$  con la *permittività elettrica relativa del mezzo*  $\epsilon_r$  (che, per un mezzo omogeneo ed isotropo, è un

numero puro sempre maggiore di 1 che dipende dalla natura del dielettrico) e per fare questo si considera l'*induzione elettrica*

$$(1.7) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

(dove  $\epsilon_0$  è la *permittività elettrica del vuoto*) che tiene conto del campo elettrico totale  $\mathbf{E}$  agente sul dielettrico e del contributo del dielettrico stesso. Nel caso che si sta considerando, ossia di assenza di campo magnetico,  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{E}$  risultano paralleli e quindi si può anche scrivere

$$(1.8) \quad \mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E},$$

---

NOTA: dalla (1.7) e (1.8), considerando che per un mezzo omogeneo ed isotropo è  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , si ha  $\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$  da cui segue che  $\epsilon_r = (1 + \chi)$ .

---

confrontando la (1.7) con la (1.8) e considerando la (1.5) si ottiene

$$(1.9) \quad \epsilon_r = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{|\mathbf{P}|}{|\mathbf{E}|} = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2};$$

A questo punto il passo successivo che si deve compiere è studiare la propagazione di un'onda elettromagnetica attraverso un mezzo continuo caratterizzato da una costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  del tipo (1.9). Per fare questo si scrivono inizialmente le equazioni di Maxwell nel vuoto

$$(1.10) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{H}}; \end{cases}$$

le onde elettromagnetiche sono in questo caso caratterizzate da una velocità  $c = 1/(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ . Se si considera adesso un mezzo caratterizzato da una certa costante dielettrica  $\epsilon_r$  le stesse equazioni diventano (in accordo con le ipotesi semplificatrici prima enunciate e sempre considerando un mezzo omogeneo ed isotropo)

$$(1.11) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \epsilon_0 \chi \dot{\mathbf{E}} = \epsilon_0 (1 + \chi) \dot{\mathbf{E}} = \epsilon_r \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{H}}; \end{cases}$$

in questo caso le onde elettromagnetiche sono caratterizzate da una velocità

$$(1.12) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

Si introduce adesso l'indice di rifrazione  $n$  che è legato alla velocità dell'onda elettromagnetica dalla relazione

$$(1.13) \quad v = \frac{c}{n};$$

sostituendo la (1.13) nella (1.12) ed elevando al quadrato si ottiene

$$(1.14) \quad n^2 = \epsilon_r,$$

e tenendo in considerazione la (1.9) si ha

$$(1.15) \quad n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2};$$

La (1.15) non è altro che l'espressione dell'indice di rifrazione per un'onda elettromagnetica che si propaga attraverso un mezzo elettricamente isotropo. La (1.15) è usata per evidenziare le caratteristiche dispersive del mezzo e per questo viene anche detta *relazione di dispersione*. Le grandezze  $\mu_r$  (*permeabilità magnetica relativa del mezzo*),  $\epsilon_r$  (*permittività elettrica relativa del mezzo*) e  $\sigma$  (*conduttività*), dalle quali l'indice di rifrazione può dipendere, possono essere espresse da valori complessi e quindi anche l'indice di rifrazione sarà in questo caso una quantità complessa; ciò avrà un'enorme influenza sull'assorbimento delle onde elettromagnetiche nei mezzi materiali.

NOTA: si noti dalla (1.15) che l'indice di rifrazione è  $<1$ , il che vuol dire che  $v > c$ ; tale relazione può sembrare un paradosso fisico, in realtà nella definizione (1.13) dell'indice di rifrazione con  $v$  si intende la velocità di fase  $v_f$  dell'onda elettromagnetica (definita dalla relazione  $v_f = \lambda v$  dove con  $v$  si intende la frequenza dell'onda elettromagnetica) e cioè la velocità con cui varia la fase dell'onda nel suo propagarsi. A  $v_f$  pertanto non è associato alcun trasporto né di massa né di energia; il fatto che  $v_f > c$  vuol semplicemente significare che a parità di frequenza la lunghezza d'onda è maggiore nel mezzo che nel vuoto.

L'energia dell'onda viaggia invece con la cosiddetta velocità di gruppo  $v_g$ , velocità questa che, ovviamente, non può eccedere quella della luce; le due velocità, trattando di onde elettromagnetiche, sono legate dalla relazione  $c = (v_f v_g)^{1/2}$ .

Si suppone adesso che il mezzo sia elettricamente non isotropo, il che vuol dire che  $\mathbf{P}$  non è necessariamente nella stessa direzione di  $\mathbf{E}$ . Si vedrà che, in un tale mezzo, l'onda elettromagnetica non ha più una polarizzazione piana cosicché il suo campo elettrico e magnetico possono avere componenti lungo le tre direzioni  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y$  e  $H_z$ .

NOTA: per *onda piana* si intende un'onda i cui punti di uguale fase si trovano su un piano, per *onda polarizzata piana* si intende un'onda per la quale le componenti di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  si trovano su un piano; i due piani non è detto corrispondano come ad esempio accade per le onde acustiche dove l'oscillazione di  $\mathbf{E}$  avviene lungo la direzione di propagazione.

Un'onda elettromagnetica nel vuoto ha una polarizzazione piana con piano di polarizzazione ortogonale alla direzione di propagazione; in un mezzo conduttore con un  $\mathbf{B}$

presente (quindi in un mezzo non isotropo elettricamente) l'onda non è più polarizzata piana perché esce fuori una componente  $E_z$  dovuta al fatto che il mezzo è conduttore. In questo caso non si parla più di polarizzazione piana ma di polarizzazione spaziale.

---

Per prima cosa studieremo la propagazione delle onde (o meglio, come si vedrà a breve, di *onde caratteristiche*) in un mezzo qualsiasi dopodichè, in un secondo momento, per trovare l'indice di rifrazione della ionosfera, introdurremo le proprietà del mezzo magnetionico.

La polarizzazione dell'onda, descritta dai rapporti  $E_y/E_x$ ,  $E_z/E_x$ ,  $H_y/H_x$  e  $H_z/H_x$  (vedi NOTA poco dopo), in generale, se il mezzo non è omogeneo e isotropo, cambia al viaggiare dell'onda; si vuole però vedere se ci sono onde (dette *onde caratteristiche*) che propagandosi lungo una determinata direzione non cambiano la loro polarizzazione.

Si considera allora un'onda piana (il che non vuol dire polarizzata piana!) che viaggia lungo la direzione  $z$ , per cui tutte le componenti di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  variano con  $z$  come  $\exp(-ikz)$  e non variano lungo le direzioni  $x$  e  $y$  che giacciono nel fronte d'onda (quindi onde espresse dalle seguenti relazioni  $\mathbf{E}(z,t)=\mathcal{E}\exp(-ikz)\exp(i\omega t)$  e  $\mathbf{H}(z,t)=\mathcal{H}\exp(-ikz)\exp(i\omega t)$ ); in questo caso i rapporti che descrivono la polarizzazione dell'onda saranno gli stessi per tutti i valori di  $z$ , cosicché si può dire che al viaggiare dell'onda la polarizzazione non cambia. Si parla in questo caso di onda caratteristica.

---

NOTA: viene esaminata la rappresentazione matematica dei vari stati di polarizzazione di un'onda polarizzata piana che si propaga lungo la direzione  $z$ . Nel sistema di riferimento fissato le componenti  $x$  e  $y$  del campo elettrico  $\mathbf{E}$  associato all'onda possono essere scritte, utilizzando il formalismo complesso, nella forma

$$E_x(z,t) = \mathcal{E}_x \exp^{-i(kz+\psi_x)} \exp^{(i\omega t)},$$

$$E_y(z,t) = \mathcal{E}_y \exp^{-i(kz+\psi_y)} \exp^{(i\omega t)}.$$

Il rapporto  $E_y/E_x$  risulta quindi essere

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} \exp^{-i(\psi_y - \psi_x)} = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} \exp^{-i\delta_\psi},$$

dove  $\delta_\psi = \psi_y - \psi_x$ .

Da tale rapporto si può immediatamente determinare la natura della polarizzazione dell'onda.

Per  $\delta_\psi = m\pi$  (con  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) si ha

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x},$$

il che corrisponde ad una polarizzazione lineare (se  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y$  l'angolo formato dal vettore  $\mathbf{E}$  con gli assi  $x$  e  $y$  è di  $45^\circ$ ).

Per  $\delta_\psi = \pi/2$  e  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y$  si ha

$$\frac{E_y}{E_x} = \exp^{-i\frac{\pi}{2}} = -i,$$

il che corrisponde ad una polarizzazione circolare destrorsa (se  $E_x \neq E_y$  la polarizzazione dell'onda è invece ellittica).

Per  $\delta_\psi = -\pi/2$  e  $E_x = E_y$  si ha

$$\frac{E_y}{E_x} = \exp^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$

il che corrisponde ad una polarizzazione circolare sinistrorsa (se  $E_x \neq E_y$  la polarizzazione dell'onda è invece ellittica).

Per  $0 < \delta_\psi < \pi/2$  e  $\pi/2 < \delta_\psi < \pi$  (indifferentemente per  $E_x = E_y$  o  $E_x \neq E_y$ ) la polarizzazione dell'onda risulta essere ellittica, destrorsa.

Per  $0 < \delta_\psi < -\pi/2$  e  $-\pi/2 < \delta_\psi < -\pi$  (indifferentemente per  $E_x = E_y$  o  $E_x \neq E_y$ ) la polarizzazione dell'onda risulta essere ellittica, sinistrorsa.

---

Per questo tipo di onda la terza e la quarta equazione di Maxwell, tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= -ik, & \frac{\partial}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= i\omega, & \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= -\omega^2, \end{aligned}$$

proiettate sui tre assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  danno

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \dot{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}, \\ \begin{cases} ikH_y = i\omega(\epsilon_0 E_x + P_x), \\ -ikH_x = i\omega(\epsilon_0 E_y + P_y), \\ 0 = i\omega(\epsilon_0 E_z + P_z) = i\omega D_z, \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \dot{\mathbf{H}}, \\ \begin{cases} ikE_y = -i\omega \mu_0 H_x, \\ -ikE_x = -i\omega \mu_0 H_y, \\ 0 = -i\omega \mu_0 H_z. \end{cases} \end{aligned}$$

Per le (1.16) si è considerato che la polarizzazione del mezzo può essere espressa come  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ , con  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ .

---

NOTA: questi calcoli sono stati effettuati considerando che le componenti lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$  del rotore del generico vettore  $\mathbf{A}$  si possono calcolare come il determinante della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \hat{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\text{e che} \begin{cases} \mathbf{H}(z, t) = \mathcal{H} \exp(-ikz) \exp(i\omega t), \\ \mathbf{E}(z, t) = \mathcal{E} \exp(-ikz) \exp(i\omega t). \end{cases}$$


---

Si vuole porre l'attenzione sul fatto che l' $\mathbf{H}$  di cui si è parlato fino a questo momento è quello dell'onda elettromagnetica.

Dalle (1.16) e (1.17) si vede che  $H_z=0$  e quindi si può dire che *il campo magnetico dell'onda giace interamente nel fronte d'onda*, mentre  $E_z \neq 0$  il che implica che *il campo elettrico dell'onda può avere una componente ortogonale al fronte d'onda lungo la direzione di propagazione* (a questo proposito è interessante notare come, essendo  $D_z=0$ ,  $\mathbf{D}$  giace interamente nel fronte d'onda sebbene  $\mathbf{E}$  possa avere una componente ortogonale al fronte d'onda); questa differenza tra campo elettrico e campo magnetico nasce dal fatto che si considera il mezzo caratterizzato solo da proprietà elettriche ma non magnetiche (è stato infatti imposto che  $\mu=\mu_0$ ), il che vuol dire che il mezzo non può avere nessuna polarizzazione magnetica indotta.

Combinando la prima equazione delle (1.16) con la seconda equazione delle (1.17) e la seconda delle (1.16) con la prima delle (1.17) si ottiene

$$(1.18) \quad \frac{k^2}{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2} = 1 + \frac{P_x}{\epsilon_0 E_x},$$

e

$$(1.19) \quad \frac{k^2}{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2} = 1 + \frac{P_y}{\epsilon_0 E_y},$$

e dato che i primi membri delle (1.18) e (1.19) sono uguali, segue che

$$(1.20) \quad \frac{P_x}{E_x} = \frac{P_y}{E_y},$$

ossia  $P_x$  e  $P_y$  variano lungo  $z$  allo stesso modo di  $E_x$  e  $E_y$ .

Inoltre è chiaro che solo onde che viaggiano lungo  $z$  senza cambiare la loro polarizzazione, ovvero onde caratteristiche, potranno soddisfare la (1.20).

A questo punto si può usare la (1.18) per ricavare la *velocità dell'onda caratteristica* e, considerando che  $v=\omega/k$ , si ha

$$(1.21) \quad \frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \left( 1 + \frac{P_x}{\epsilon_0 E_x} \right);$$

tenendo presente che  $v=c/n$  e che  $c=1/(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$  dalla (1.21) si ricava per il quadrato dell'indice di rifrazione

$$(1.22) \quad n^2 = 1 + \frac{P_x}{\epsilon_0 E_x},$$

e analogamente partendo dalla (1.19) si ottiene

$$(1.23) \quad n^2 = 1 + \frac{P_y}{\epsilon_0 E_y}.$$

Le (1.22) e (1.23) rappresentano l'espressione dell'indice di rifrazione per un'onda caratteristica (dato che per un tale tipo di onda deve valere la (1.20), la (1.22) è la (1.23) si equivalgono) che si propaga in un mezzo qualsiasi.

Inoltre dalla prima e dalla seconda equazione delle (1.17) si ha

$$(1.24) \quad \frac{E_x}{E_y} = -\frac{H_y}{H_x}.$$

Se i rapporti (1.24) sono complessi il vettore che rappresenta la proiezione di  $\mathbf{E}$  sul fronte d'onda è polarizzato ellitticamente; anche  $\mathbf{H}$  è polarizzato ellitticamente sul fronte d'onda ma in questo caso non si parla di proiezione perché  $H_z=0$  e quindi il vettore campo magnetico è totalmente contenuto all'interno del piano  $xy$  che contiene il fronte d'onda. La (1.24) mostra anche che l'ellisse descritta da  $\mathbf{H}$  sul fronte d'onda e l'ellisse descritta dalla proiezione di  $\mathbf{E}$  sul fronte d'onda sono simili e girano nello stesso verso, ma hanno gli assi maggiori ruotati di  $90^\circ$ . Dalla prima e dalla seconda equazione delle (1.17) si vede inoltre che se  $k$  è reale allora  $\mathbf{H}$  e la proiezione di  $\mathbf{E}$  sul fronte d'onda si trovano a  $90^\circ$  l'uno rispetto all'altro per tutto il ciclo, ma se  $k$  è complesso ( $k$  può essere complesso in quanto dipende dalla permittività elettrica che può essere complessa  $\epsilon_r=\epsilon_{r(\text{reale})}+j\epsilon_{r(\text{immaginaria})}$ ), il che implica che ci sia assorbimento (visto che la parte immaginaria di  $k$  contribuisce ad un esponenziale reale), il campo magnetico istantaneo non è perpendicolare alla componente istantanea del campo elettrico sul fronte d'onda.

In virtù delle (1.20) e (1.24) si ha

$$(1.25) \quad -\frac{H_y}{H_x} = \frac{E_x}{E_y} = \frac{P_x}{P_y} = R,$$

dove  $R$  è detto *fattore di polarizzazione dell'onda*. Se  $R$  è reale il campo magnetico è polarizzato linearmente, se  $R$  è complesso il campo magnetico è polarizzato ellitticamente (si è scelto di rappresentare la polarizzazione dell'onda in termini di  $\mathbf{H}$  invece che di  $\mathbf{E}$ , perché  $\mathbf{H}$ , a differenza di  $\mathbf{E}$  che ha una componente ortogonale al fronte d'onda, giace interamente nel fronte d'onda).

Al momento è stato calcolato l'indice di rifrazione, vedi ad esempio la (1.22), in funzione dei rapporti  $P_x/E_x$  e  $P_y/E_y$ ; per esprimere tali rapporti bisogna a questo punto introdurre le caratteristiche del mezzo nel quale l'onda si propaga.

Si considera quindi un *mezzo magnetoionico* composto di elettroni di densità  $N$ , posti in una distribuzione neutralizzante di cariche positive stazionarie, in presenza di un campo magnetico costante  $\mathbf{H}_0$ ; si assume poi che  $\mathbf{H}_0$  giaccia nel piano  $yz$  e abbia componenti  $H_L$  lungo  $z$  e  $H_T$  lungo  $y$  così come mostrato in Figura 1.2.

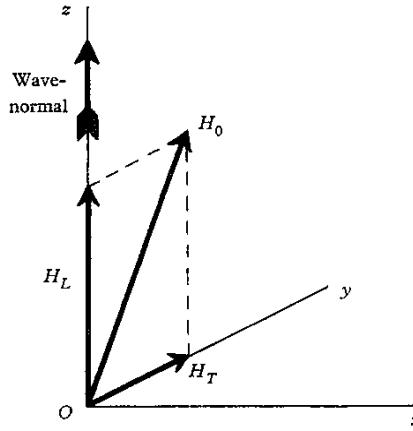


Figura 1.2

Si assume quindi che un'onda sinusoidale, del tipo  $\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{E}\exp(-ikz)\exp(i\omega t)$  (e analogamente per il campo magnetico  $\mathbf{H}(z,t)=\mathbf{H}\exp(-ikz)\exp(i\omega t)$ ), si propaghi attraverso il mezzo lungo la direzione  $z$ ; in questo caso l'equazione del moto di un elettrone è

$$(1.26) \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + e\mu_0(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}_0),$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità dell'elettrone (si è trascurata la forza di Lorentz dovuta al campo magnetico dell'onda elettromagnetica).

Considerando che

$$(1.27) \quad \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & H_T & H_L \end{bmatrix},$$

proiettando la (1.26) sui tre assi  $x$ ,  $y$ , e  $z$  si ottengono le seguenti espressioni

$$(1.28) \quad \begin{cases} eE_x = m\ddot{x} - \mu_0 e H_L \dot{y} + \mu_0 e H_T \dot{z}, \\ eE_y = m\ddot{y} + \mu_0 e H_L \dot{x}, \\ eE_z = m\ddot{z} - \mu_0 e H_T \dot{x}. \end{cases}$$

Proiettando adesso il momento di dipolo per unità di volume  $\mathbf{P}=Ner$  sui tre assi  $x$ ,  $y$ , e  $z$  si ricavano le seguenti espressioni

$$(1.29) \quad \begin{cases} P_x = N e x, \\ P_y = N e y, \\ P_z = N e z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\dot{P}_x}{N e} = i \frac{\omega}{N e} P_x, \\ \dot{y} = \frac{\dot{P}_y}{N e} = i \frac{\omega}{N e} P_y, \\ \dot{z} = \frac{\dot{P}_z}{N e} = i \frac{\omega}{N e} P_z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{\ddot{P}_x}{N e} = -\frac{\omega^2}{N e} P_x, \\ \ddot{y} = \frac{\ddot{P}_y}{N e} = -\frac{\omega^2}{N e} P_y, \\ \ddot{z} = \frac{\ddot{P}_z}{N e} = -\frac{\omega^2}{N e} P_z. \end{cases}$$

Sostituendo le (1.29) nelle (1.28), moltiplicando tutto per  $\epsilon_0$ , dividendo tutto per  $e$ , e moltiplicando e dividendo per  $m$  e  $\omega$  i termini con  $H_L$  e  $H_T$  si ottiene

$$(1.30) \quad \begin{cases} \epsilon_0 E_x = -\frac{\epsilon_0 m \omega^2}{Ne^2} P_x - i \frac{\epsilon_0 m \omega^2}{Ne^2} \left( \frac{\mu_0 H_L e}{m \omega} \right) P_y + i \frac{\epsilon_0 m \omega^2}{Ne^2} \left( \frac{\mu_0 H_T e}{m \omega} \right) P_z, \\ \epsilon_0 E_y = -\frac{\epsilon_0 m \omega^2}{Ne^2} P_y + i \frac{\epsilon_0 m \omega^2}{Ne^2} \left( \frac{\mu_0 H_L e}{m \omega} \right) P_x, \\ \epsilon_0 E_z = -\frac{\epsilon_0 m \omega^2}{Ne^2} P_z - i \frac{\epsilon_0 m \omega^2}{Ne^2} \left( \frac{\mu_0 H_T e}{m \omega} \right) P_x. \end{cases}$$

Vengono introdotte adesso le seguenti grandezze

$$(1.31) \quad \begin{aligned} X &= \frac{\omega_N^2}{\omega^2}, & \text{dove} & \quad \omega_N^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}, \\ Y &= \frac{\omega_H}{\omega}, & \text{dove} & \quad \omega_H = \frac{\mu_0 H_0 e}{m}, \\ Y_L &= \frac{\omega_L}{\omega}, & \text{dove} & \quad \omega_L = \frac{\mu_0 H_L e}{m} \quad \text{e} \quad H_L = H_0 \cos \vartheta, \\ Y_T &= \frac{\omega_T}{\omega}, & \text{dove} & \quad \omega_T = \frac{\mu_0 H_T e}{m} \quad \text{e} \quad H_T = H_0 \sin \vartheta; \end{aligned}$$

$\omega_N$  è la *frequenza angolare di plasma*,  $\omega_H$  è la *girofrequenza*,  $\omega_L$  e  $\omega_T$  sono rispettivamente la girofrequenza longitudinale e trasversale e  $\theta$  è l'angolo formato da  $\mathbf{H}_0$  con l'asse  $z$ .

Tenendo conto delle (1.31) le (1.30), dopo aver moltiplicato tutto per  $X$ , diventano

$$(1.32) \quad \begin{cases} \epsilon_0 X E_x = -P_x - i Y_L P_y + i Y_T P_z, \\ \epsilon_0 X E_y = -P_y + i Y_L P_x, \\ \epsilon_0 X E_z = -P_z - i Y_T P_x. \end{cases}$$

Le (1.32) vengono chiamate le *equazioni costitutive del mezzo* e mostrano come le componenti del campo elettrico sono legate alle componenti del vettore di polarizzazione; si vede chiaramente che se non ci fosse il campo magnetico  $\mathbf{H}_0$  le (1.32) non sarebbero altro che la rappresentazione scalare dell'equazione vettoriale (1.5). Dalle (1.32) appare chiaro che in presenza di un campo magnetico esterno il campo  $\mathbf{E}$  dell'onda elettromagnetica muove gli elettroni non solo lungo la direzione del campo elettrico ma anche in direzioni ad essa perpendicolari. Quindi, per riassumere, in assenza di un campo magnetico  $\mathbf{H}_0$  il vettore  $\mathbf{P}$  e il vettore  $\mathbf{E}$  sono paralleli e la polarizzabilità  $\sigma$  è una quantità scalare, mentre se è presente un campo magnetico  $\mathbf{H}_0$  il vettore  $\mathbf{P}$  può non avere la stessa direzione del vettore  $\mathbf{E}$  e la polarizzabilità  $\sigma$  è un tensore.

Un'onda caratteristica che si propaga in un mezzo non isotropo deve soddisfare la (1.20); si vuole adesso vedere cosa comporta la (1.20) per un mezzo magnetoionico.

Per prima cosa si ricava  $E_z$  dalla terza equazione delle (1.16) e lo si sostituisce nella terza equazione delle (1.32) ottenendo

$$(1.33) \quad (1 - X) P_z = -i Y_T P_x;$$

ricavando  $P_z$  dalla (1.33) e sostituendolo nella prima equazione delle (1.32) si ha

$$(1.34) \quad \varepsilon_0 X \frac{E_x}{P_x} = -\left(1 - \frac{Y_T^2}{1-X}\right) - iY_L \frac{P_y}{P_x}.$$

La seconda equazione delle (1.32) si può riscrivere

$$(1.35) \quad \varepsilon_0 X \frac{E_y}{P_y} = -1 + iY_L \frac{P_x}{P_y}.$$

Ora in virtù della (1.20) i primi membri delle (1.34) e (1.35) risultano essere uguali e quindi si ottiene la seguente relazione

$$(1.36) \quad iY_L \left( \frac{P_x}{P_y} \right)^2 - \frac{Y_T^2}{1-X} \left( \frac{P_x}{P_y} \right) + iY_L = 0.$$

Dalla (1.36) si vede che per il rapporto  $P_x/P_y$  si ricavano due valori, il che corrisponde alla propagazione nel mezzo di due onde caratteristiche. Questo vuol dire che, in corrispondenza dell'invio in un mezzo magnetoionico di un'onda elettromagnetica con una certa polarizzazione, si propagano in esso due onde caratteristiche della stessa frequenza, caratterizzate però da una diversa velocità di fase, diverso coefficiente d'assorbimento e diverso stato di polarizzazione. Si parla di *birifrazione magnetoionica dell'onda elettromagnetica nel magnetoplasma*. Semplicisticamente parlando, un'onda con una polarizzazione qualsiasi può essere pensata come la risultante di due onde caratteristiche; se tale onda si propaga in un mezzo isotropo le due componenti rimangono indistinguibili, al contrario se si propaga in un mezzo anisotropo (come è il caso di un mezzo magnetoionico) le due componenti si riescono a distinguere.

Risolvendo la (1.36) si ottiene per il rapporto  $P_x/P_y$  e quindi per il fattore di polarizzazione dell'onda  $R$  (vedi (1.25))

$$(1.37) \quad R = \frac{P_x}{P_y} = -\frac{i}{Y_L} \left[ \frac{Y_T^2}{2(1-X)} \mp \left( \frac{Y_T^4}{4(1-X)^2} + Y_L^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

dove non si è messo  $\pm$  ma il suo opposto solo perché questo risulterà comodo in seguito.

Dato che  $H_y/H_x = -R$  e  $H_z = 0$  la (1.37) dà un'informazione completa riguardo la polarizzazione del campo magnetico dell'onda caratteristica e la polarizzazione di quelle componenti del campo elettrico che giacciono sul fronte d'onda, ma per completare la descrizione del campo elettrico dell'onda caratteristica è necessario che venga studiata anche la componente longitudinale  $E_z$ . Per fare questo si ricava  $P_z$  dalla terza equazione delle (1.16) e lo si sostituisce nella terza equazione delle (1.32) ricavando per  $P_x$  la seguente espressione

$$(1.38) \quad P_x = \frac{\varepsilon_0(X-1)}{-iY_T} E_z.$$

Sostituendo la (1.38) nella (1.22) (che rappresenta l'espressione dell'indice di rifrazione per un'onda caratteristica) si ha

$$(1.39) \quad \frac{E_z}{E_x} = iY_T \frac{n^2 - 1}{1 - X},$$

che è l'equazione giusta per poter ottenere informazioni sulla componente  $E_z$ ; per poter risolvere la (1.39) serve però un'espressione per  $n^2$ . Per fare questo dalla (1.35) si ricava per  $P_y/E_y$  la seguente espressione

$$(1.40) \quad \varepsilon_0 X \frac{E_y}{P_y} = -1 + iY_L \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \frac{E_y}{P_y} = \frac{-1 + iY_L \frac{P_x}{P_y}}{\varepsilon_0 X} \Rightarrow \frac{P_y}{E_y} = \frac{\varepsilon_0 X}{-1 + iY_L \frac{P_x}{P_y}},$$

che sostituita nella (1.23) dà

$$(1.41) \quad n^2 = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{P_y}{E_y} = 1 - \frac{X}{1 - iY_L \frac{P_x}{P_y}}.$$

Sostituendo la (1.37) nella (1.41) si trova l'espressione cercata per l'indice di rifrazione

$$(1.42) \quad n^2 = 1 - \frac{X}{1 - \frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{1 - X} \pm \left[ \frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1 - X)^2} + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Fino ad adesso non si è parlato delle collisioni che gli elettroni possono avere con le particelle pesanti come atomi neutri o ioni positivi; considerando anche questo aspetto l'equazione del moto degli elettroni viene modificata mediante l'introduzione di una forza d'attrito proporzionale alla velocità degli elettroni  $-mv(d\mathbf{r}/dt)$ , dove  $v$  è la frequenza media di collisione tra un elettrone e le particelle pesanti. In queste collisioni l'energia cinetica conferita dall'onda agli elettroni è ceduta alle molecole neutre. Il risultato è l'assorbimento dell'onda elettromagnetica, parte dell'energia dell'onda è ceduta prima agli elettroni e poi alle molecole neutre; in definitiva il mezzo viene riscaldato. L'introduzione del termine  $-mv(d\mathbf{r}/dt)$  è una schematizzazione che funziona abbastanza bene se la frequenza di collisione è bassa in confronto alla frequenza dell'onda. In realtà, così facendo, si assume che tutti gli elettroni posseggano la stessa velocità media e che  $v$  sia indipendente dalla velocità degli elettroni; questo però non è vero, poiché gli elettroni hanno una curva di distribuzione della velocità maxwelliana. Risulta quindi essere di fondamentale importanza sapere come la distribuzione delle velocità elettroniche è correlata con la frequenza di collisione. Questo è il vero punto debole della teoria magnetoionica perché ad oggi ancora non c'è una esatta conoscenza della funzione  $v(\mathbf{v})$ .

In assenza di un campo magnetico esterno l'equazione del moto di un elettrone diventa quindi

$$(1.43) \quad m\ddot{\mathbf{r}} + m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

e ragionando come fatto per ricavare la (1.5) si ottiene

$$(1.44) \quad \mathbf{P} = -\frac{Ne^2}{m(\omega^2 - i\nu\omega)} \mathbf{E}.$$

La (1.44) si può anche scrivere

$$(1.45) \quad \epsilon_0 X \mathbf{E} = -(1 - iZ) \mathbf{P} \quad \text{dove} \quad Z = \frac{\nu}{\omega}.$$

Quindi quando si considera un'onda caratteristica che si propaga attraverso un mezzo magnetoionico, l'equazione del moto dell'elettrone sarà

$$(1.46) \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e \mathbf{E} + e \mu_0 (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}_0) - m \nu \frac{d \mathbf{r}}{dt},$$

e le *equazioni costitutive del mezzo* diventano

$$(1.47) \quad \begin{cases} \epsilon_0 X E_x = -(1 - iZ) P_x - iY_L P_y + iY_T P_z, \\ \epsilon_0 X E_y = -(1 - iZ) P_y + iY_L P_x, \\ \epsilon_0 X E_z = -(1 - iZ) P_z - iY_T P_x. \end{cases}$$

Ragionando come fatto precedentemente, nel caso in cui le collisioni non venivano considerate, si arriva alle seguenti equazioni per il fattore di polarizzazione dell'onda

$$(1.48) \quad R = \frac{P_x}{P_y} = -\frac{i}{Y_L} \left[ \frac{Y_T^2}{2(1 - X - iZ)} \mp \left( \frac{Y_T^4}{4(1 - X - iZ)^2} + Y_L^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

e per l'indice di rifrazione

$$(1.49) \quad n^2 = (\mu - i\chi)^2 = 1 - \frac{X}{1 - iZ - \frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{(1 - X - iZ)} \pm \left[ \frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1 - X - iZ)^2} + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

L'equazione (1.49), che insieme alla (1.48) costituiscono le equazioni della teoria magnetoionica, è nota come *equazione di Altar-Appleton* e da questa si vede come in genere  $n$  sia complesso, il che vuol dire che le onde, come conseguenza delle collisioni subite dagli elettroni, vengono attenuate.

Le equazioni (1.48) e (1.49) rappresentano il comportamento di due onde piane (attenzione: il che non vuol dire polarizzate piane!) caratteristiche che possono propagarsi lungo  $z$  in un mezzo magnetoionico omogeneo senza che la loro polarizzazione cambi (in realtà la ionosfera è un mezzo magnetoionico non omogeneo e quindi la polarizzazione delle onde caratteristiche può cambiare). Quindi, se un'onda inizia a propagarsi lungo  $z$  con una polarizzazione diversa da quella che caratterizza le due onde caratteristiche, verrà splittata in

due onde caratteristiche; ognuna di queste due onde si propagherà con una propria velocità caratteristica e una propria attenuazione e l'onda risultante mentre si propaga avrà una polarizzazione che cambia. L'onda di partenza si propagherà in modo che la polarizzazione rimanga inalterata solo se ha una polarizzazione corrispondente a una delle due polarizzazioni che caratterizzano le onde caratteristiche.

Le velocità, gli assorbimenti e le polarizzazioni delle due onde caratteristiche dipendono tra le altre cose da  $Y_L$ ,  $Y_T$  e dall'angolo  $\theta$  tra la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica e il campo magnetico  $\mathbf{H}_0$ .

## 2. Assorbimento secondo la teoria macroscopica

Si parlerà in questo paragrafo del fatto che un'onda elettromagnetica nel momento in cui viaggia attraverso un mezzo subisce un assorbimento dovuto al fatto che gli elettroni collidono con le particelle pesanti.

La teoria cinetica dei gas ci dice che, se un gas è costituito di atomi e molecole simili di raggio  $r_a$ , una collisione avviene nel momento in cui i centri di due molecole si trovano ad una distanza minore di  $2r_a$ ; in questo caso il cammino libero medio è dato approssimativamente da

$$(2.1) \quad l_a = \left\{ \pi (2r_a)^2 n_a \right\}^{-1},$$

dove  $n_a$  è la densità degli atomi o delle molecole.

Se un elettrone, che si può considerare di raggio trascurabile, si muove tra le particelle di questo gas, si assume che avviene una collisione nel momento in cui il suo centro si trova ad una distanza minore di  $r_a$  rispetto al centro di una particella; il cammino libero medio risulta essere in questo caso dato approssimativamente da

$$(2.2) \quad l_e = \left\{ \pi r_a^2 n_a \right\}^{-1},$$

e, a meno che gli elettroni non siano molto più numerosi delle particelle pesanti, allora le collisioni tra loro stessi possono essere trascurate.

Se la velocità media  $v_e$  degli elettroni è nota, la frequenza media delle loro collisioni con le particelle neutre è determinata dalla relazione

$$(2.3) \quad v_{ea} = \frac{v_e}{l_e}.$$

Nella sua forma più semplice la teoria cinetica dei gas fornisce la velocità  $v_e$  in termini della temperatura  $T$  attraverso la relazione

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} m v_e^2 = \left( \frac{3}{2} \right) k T,$$

da cui

$$(2.5) \quad v_e = \left( \frac{3kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sostituendo la (2.2) e la (2.5) nella (2.3) si ottiene

$$(2.6) \quad v_{ea} = \pi r_a^2 n_a \left( \frac{3kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Per  $r_a$  si assume tipicamente il valore che caratterizza l'aria al suolo, dell'ordine di  $10^{-8}$  cm; se tale valore viene sostituito nella (2.6) si ha

$$(2.7) \quad \nu_{ea} = 3,7 \cdot 10^{-9} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{1}{2}} n_a \quad \text{s}^{-1},$$

con  $n_a$  espresso in  $\text{cm}^{-3}$  (ad un'altezza di 100 km tipicamente per la ionosfera si ha  $T=300^\circ \text{ K}$  e  $n_a=10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , e quindi  $\nu_{ea}=3.7 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ ).

Si suppone adesso che un elettrone si muova in un gas costituito in parte da molecole e atomi neutri e in parte da molecole e atomi ionizzati; come è stato già detto il suo moto può essere influenzato da una particella neutra all'interno di una distanza  $r_a$ , ma il suo moto può essere sensibilmente influenzato da uno ione a distanze ben maggiori. Il raggio effettivo di collisione tra un elettrone ed uno ione può essere infatti assai più grande del raggio di collisione con una particella neutra.

È possibile stimare l'ordine di grandezza di questo raggio effettivo supponendo che la deviazione subita da un elettrone ad opera di uno ione, per essere considerata come una collisione, debba essere così grande che la distanza  $r_{eff}$  dallo ione sia tale che la sua energia potenziale uguagli l'energia cinetica originale

$$(2.8) \quad \frac{3}{2} kT = \frac{e^2}{\epsilon_0 r_{eff}}.$$

La frequenza di collisione  $\nu_{ei}$ , tra gli elettroni e gli ioni, può essere quindi derivata dalla (2.6) sostituendo la densità ionica  $n_i$  a  $n_a$  e mettendo il raggio  $r_{eff}$  ricavato dalla (2.8) al posto di  $r_a$

$$(2.9) \quad \nu_{ei} = \pi \left( \frac{2e^2}{3\epsilon_0 kT} \right)^2 n_i \left( \frac{3kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{4\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \right) \left( \frac{e^4}{\epsilon_0^2 m^{\frac{1}{2}}} \right) (kT)^{-\frac{3}{2}} n_i,$$

e inserendo nella (2.9) i valori numerici si ottiene

$$(2.10) \quad \nu_{ei} = 5,1 \cdot 10^{-4} n_i \left( \frac{T}{300} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Si può notare che  $\nu_{ei}$  è proporzionale a  $T^{3/2}$  mentre  $\nu_{ea}$  a  $T^{1/2}$  e quindi all'aumentare della temperatura la componente ionica diventa meno importante e questo perché la sezione d'urto degli ioni diminuisce come si può vedere dalla (2.8); uno studio compiuto da Cowling nel 1945 ha portato alla seguente espressione

$$(2.11) \quad \nu_e = \nu_{ea} + \nu_{ei} = 1,8 \cdot 10^{-8} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{1}{2}} n_a + 6,1 \cdot 10^{-3} \left( \frac{T}{300} \right)^{-\frac{3}{2}} n_i.$$

Osservando la (2.11) è interessante notare come il contributo di ogni singolo ione alla frequenza di collisione  $\nu_e$  corrisponde al contributo di un numero di particelle neutre pari a  $3,4 \cdot 10^5 (1/T)^2$ ; bisogna dire però che il contributo ionico diventa sempre meno importante al crescere della temperatura in quanto, a velocità più elevate (maggiore è la temperatura, maggiore è la velocità delle particelle), la sezione d'urto  $\pi r_{eff}^2$  diventa sempre più piccola (ioni e particelle neutre hanno un contributo praticamente uguale ad una temperatura di  $1.8 \cdot 10^5^\circ \text{ K}$ ).

È interessante adesso vedere l'applicazione della (2.11) alla ionosfera terrestre. Per fare questo si considera la regione E dove la temperatura è tipicamente dell'ordine di 300° K e  $n_a \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ; le collisioni con gli ioni diventano quindi importanti solo se  $n_i > 10^8 \text{ cm}^{-3}$ . In questa regione la densità elettronica è  $\sim 10^5 \text{ cm}^{-3}$ , ne segue che gli ioni positivi corrispondenti non potranno mai raggiungere un valore tale da influenzare la frequenza di collisione  $v_e$ . È vero però che oltre agli ioni positivi corrispondenti agli elettroni ci potrebbero essere anche coppie di ioni pesanti negativi e positivi di massa molecolare; questi dovrebbero però essere 1000 volte più numerosi degli elettroni e ci sono diversi lavori a riguardo che dimostrano il contrario. *Quindi è lecito ritenere che nella regione E le collisioni avvengano principalmente tra elettroni e particelle neutre.*

Se si considera la regione F la situazione non è altrettanto semplice. Le misurazioni disponibili mostrano che  $v_e \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$  e  $n_e \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$  e se, come è molto probabile in questa regione, non ci sono ioni negativi, allora  $n_e = n_i$  e quindi dalla (2.11) si evince che la frequenza di collisione misurata, se  $T = 300^\circ \text{ K}$ , è dovuta unicamente alla componente ionica. Infatti se la temperatura è di 300° K è ragionevole pensare che la densità molecolare non superi il valore di  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Tale modello ionosferico è detto “*modello ionosferico a bassa temperatura*”.

Sempre per la regione F un altro modello suppone che la temperatura sia dell'ordine di 3000° K e quindi se come prima  $n_e = n_i = 10^6 \text{ cm}^{-3}$ , allora secondo la (2.11) le collisioni tra elettroni e ioni pesanti contribuiscono a  $v_e$  solo per una quantità  $0,2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ ; il restante  $0,8 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  deve quindi derivare dalle collisioni tra gli elettroni con le particelle neutre e questo richiede che  $n_a$  sia circa  $10^{11} \text{ cm}^{-3}$ , cosa plausibile per alte temperature. Tale modello è detto “*modello ionosferico ad alta temperatura*”.

Quindi ricapitolando per la regione F sono possibili due modelli: nel modello a bassa temperatura il gas ha una densità bassa, un'apprezzabile frazione della quale è ionizzata, e le collisioni tra elettroni e ioni sono le più importanti; nel modello ad alta temperatura il gas ha un'alta densità, una piccola frazione della quale è ionizzata, e le collisioni tra elettroni e particelle neutre sono le più importanti. Misurazioni delle frequenze di collisione non possono permettere da sole di stabilire quali dei due modelli è il più soddisfacente.

Si potrebbe pensare che le frequenze con cui un elettrone collide contro particelle neutre o ionizzate possano essere fortemente alterate nel momento in cui sul mezzo venga imposto un campo magnetico costante; in realtà analisi statistiche hanno mostrato che non vi sono cambiamenti significativi.

Si introduce adesso il concetto di coefficiente d'assorbimento e per fare questo l'indice di rifrazione viene scritto nel modo seguente

$$(2.12) \quad n = \mu - i\chi;$$

e considerando che

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega n}{c} \quad \text{e} \quad n = \frac{c}{v},$$

un'onda elettromagnetica nel mezzo è rappresentata da

$$(2.13) \quad \mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E} \exp(-ikz) \exp(i\omega t) = \mathbf{E} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)\right] = \mathbf{E} \exp\left(\frac{-\omega\chi z}{c}\right) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\mu z}{c}\right)\right].$$

La (2.13) rappresenta un'onda elettromagnetica, attenuata di una quantità  $\exp(-\chi)$  su una distanza  $z=c/\omega$ , che si propaga con velocità  $c/\mu$ ; quindi dato che  $v=c/\text{indice di rifrazione}$  ne segue che  $\mu$  rappresenta l'indice di rifrazione (di fase) mentre il *coefficiente d'assorbimento*  $\kappa$  è definito come

$$(2.14) \quad \kappa = \frac{\omega\chi}{c}.$$

È conveniente a questo punto considerare il valore di  $\chi$  nel caso in cui la normale al fronte d'onda sia lungo la direzione del campo magnetico terrestre (in questo caso è ovviamente  $Y_T=0$ ). Se  $Y_T=0$  la (1.49) diventa

$$(2.15) \quad (\mu - i\chi)^2 = 1 - \frac{X}{(1 \pm |Y_L| - iZ)},$$

da cui

$$(2.16) \quad \mu^2 - \chi^2 - 2i\mu\chi = 1 - \frac{X(1 \pm |Y_L|)}{(1 \pm |Y_L|)^2 + Z^2} - i \frac{XZ}{(1 \pm |Y_L|)^2 + Z^2},$$

da cui segue che

$$(2.17) \quad \mu^2 - \chi^2 = 1 - \frac{X(1 \pm |Y_L|)}{(1 \pm |Y_L|)^2 + Z^2},$$

e

$$(2.18) \quad 2\mu\chi = \frac{XZ}{(1 \pm |Y_L|)^2 + Z^2}.$$

Se nella (2.18) si esplicitano i valori di  $\chi$ , tramite la (2.14), di  $X$ ,  $Y_L$  e  $Z$  si ottiene

$$(2.19) \quad \kappa = \frac{1}{2c\mu} \frac{\omega_N^2 \nu}{(\omega \pm |\omega_L|)^2 + \nu^2} = \frac{1}{2c\mu} \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\nu}{(\omega \pm |\omega_L|)^2 + \nu^2};$$

di solito questa espressione si applica all'*assorbimento in regioni non deviative*.

Un'altra utile espressione si ottiene combinando la (2.17) con la (2.18) ottenendo

$$(2.20) \quad \kappa = \frac{\nu}{2c} \frac{1}{(1 \pm |Y_L|)} \left\{ \frac{1 - \mu^2 + \chi^2}{\mu} \right\};$$

nei punti dove  $\mu$  si sposta apprezzabilmente dall'unità (quindi quasi in condizioni di riflessione che sappiamo avvenire quando  $\mu=0$ ) è ragionevole assumere che  $\chi^2 \ll 1 - \mu^2$  (altrimenti l'onda sarebbe così pesantemente attenuata che in una distanza di una o due lunghezze d'onda diventerebbe inosservabile!!). In questo caso la (2.20) diviene

$$(2.21) \quad \kappa = \frac{\nu}{2c} \frac{1}{(1 \pm |Y_L|)} \left\{ \frac{1}{\mu} - \mu \right\},$$

e questa di norma è un'espressione che si usa quando si tratta l'*assorbimento in regioni deviative*.

### 3. Interpretazione grafica dell'equazione di Altar-Appleton in assenza di collisioni

In questo paragrafo l'equazione (1.49) della teoria magnetionica verrà interpretata da un punto di vista grafico assumendo che non ci siano collisioni tra gli elettroni e le particelle pesanti.

In questo caso l'equazione (1.49) per l'indice di rifrazione diviene

$$(3.1) \quad n^2 = (\mu - i\chi)^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{\left(1-X\right) - \frac{1}{2}Y_T^2 \pm \left[\frac{1}{4}Y_T^4 + Y_L^2(1-X)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

L'espressione (3.1) è sempre reale; quando è positiva è uguale a  $\mu^2$  mentre quando è negativa è uguale a  $-\chi^2$  (infatti  $(\mu-i\chi)^2=\mu^2-\chi^2-2i\mu\chi$  che per essere sempre reale deve avere o  $\mu=0$  (nel qual caso  $n^2=-\chi^2$ ) o  $\chi=0$  (nel qual caso  $n^2=\mu^2$ )).

Per la teoria ionosferica è conveniente considerare grafici che mostrino gli andamenti di  $\mu^2$  e  $\chi^2$  in funzione di  $X$ , per differenti valori di  $Y$  e di  $\theta$ .

#### 3.1 Assenza di un campo magnetico esterno

Inizialmente viene supposto che  $Y_T=Y_L=0$  e la (3.1) diviene

$$(3.2) \quad n^2 = 1 - X .$$

La relazione tra  $n^2$  e  $X$ , come mostrato in Figura 3.1, è quindi graficamente rappresentata da una retta; la parte positiva della retta rappresenta  $\mu^2$  mentre la parte negativa rappresenta  $\chi^2$  (la parte negativa viene graficata con il segno cambiato).

Quando  $X>1$  il fattore di attenuazione  $\chi$  ha una grandezza finita sebbene non ci siano collisioni e quindi nessun meccanismo attraverso il quale l'energia può essere assorbita dall'onda; poiché comunque  $\chi$  è finito solo quando  $\mu=0$  l'equazione dell'onda

$$(3.3) \quad \mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E} \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)\right\} = \mathbf{E} \exp\left(\frac{-\omega\chi z}{c}\right) \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{\mu z}{c}\right)\right\},$$

diventa

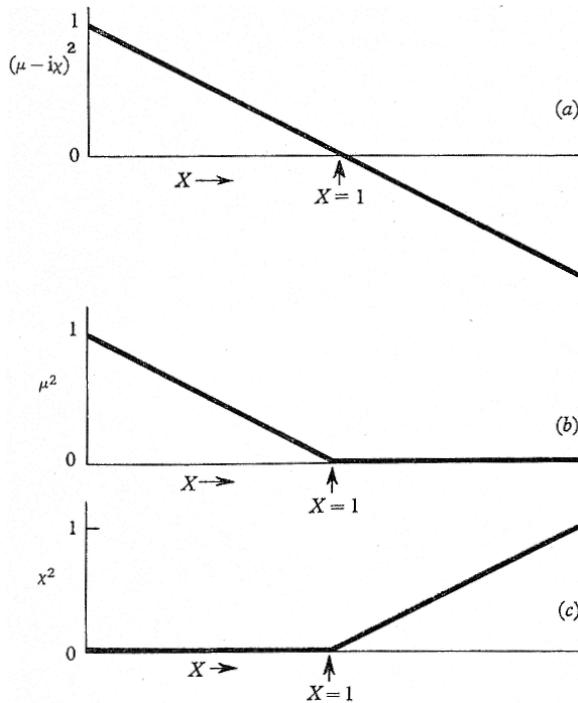
$$(3.4) \quad \mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E} \exp\left(\frac{-\omega\chi z}{c}\right) \exp(i\omega t),$$

che rappresenta un'onda di tipo evanescente, che non trasmette energia, e alla quale dunque non può corrispondere un assorbimento d'energia.

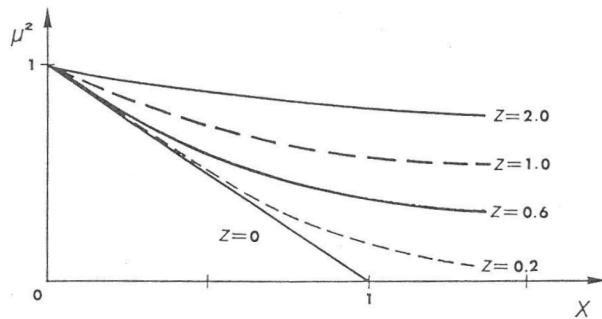
La condizione discriminante tra la zona di propagazione possibile e la zona di propagazione impossibile è quindi data da  $n^2=0$ , o meglio  $\mu=0$ , condizione cui corrisponde la riflessione dell'onda elettromagnetica.

In Figura 3.1.1, giusto per evidenziare qual è l'effetto delle collisioni, sono rappresentate le curve di dispersività per alcuni valori di  $Z$ . Si vede che queste non si annullano mai. Questo sta a significare che non vi è riflessione totale come nel grafico di Figura 3.1 ma che, in misura dipendente da  $Z$ , l'onda penetra nel plasma, indipendentemente dalla frequenza dell'onda incidente. Questo è certamente il caso più realistico in quanto vi è sempre una penetrazione delle onde elettromagnetiche. Per valori molto elevati di  $Z$  si vede che non è

possibile avere una riflessione totale, poiché c'è sempre una frazione consistente di energia che penetra ed è assorbita dal mezzo.



**Figura 3.1** Propagazione in assenza di campo magnetico ( $Y=0$ ).



**Figura 3.1.1** Propagazione in assenza di campo magnetico per diversi valori di  $Z$ .

### 3.2 Presenza di un campo magnetico esterno: propagazione longitudinale

A questo punto si considera la presenza di un campo magnetico esterno costante e si suppone che l'onda elettromagnetica si propaga lungo la direzione del campo magnetico in modo tale che  $Y_T=0$  e  $Y_L=Y$ .

In questo caso la (3.1) diventa

$$(3.5) \quad n^2 = 1 - \frac{X}{(1 \pm Y)}.$$

Le curve che mostrano l'andamento di  $n^2$ ,  $\mu^2$  e  $\chi^2$  in funzione di  $X$  sono mostrate in Figura 3.2 e Figura 3.3 per i casi in cui  $Y=1/2$  e  $Y=2$ .

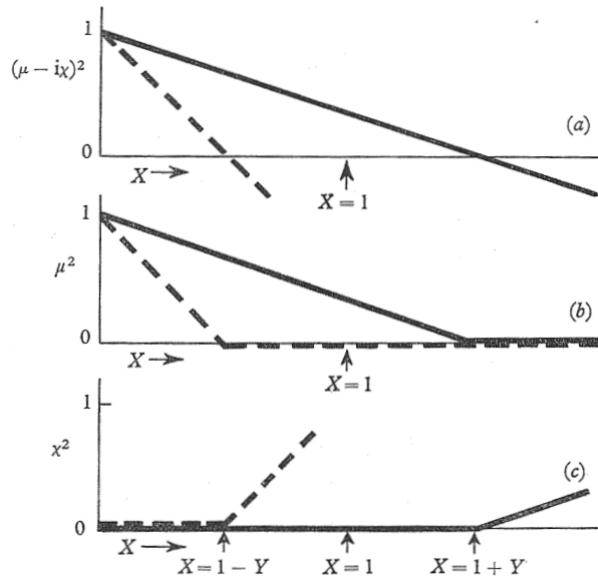


Figura 3.2 Propagazione longitudinale con  $Y < 1$  ( $Y = 1/2$ ).

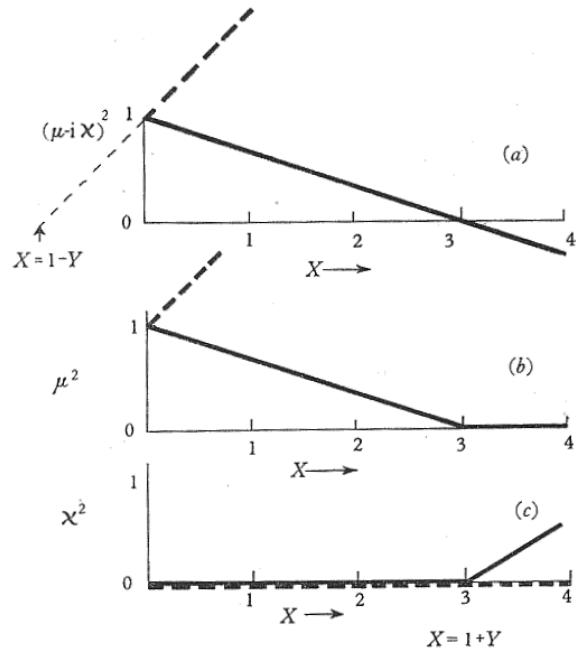


Figura 3.3 Propagazione longitudinale con  $Y > 1$  ( $Y = 2$ ).

Adesso per ogni valore di  $Y$  ci sono due curve, ognuna corrispondente ad uno dei due segni della (3.5); la curva corrispondente al segno superiore è a tratto continuo mentre la curva corrispondente al segno inferiore è tratteggiata. Si vede che quando  $Y > 1$  la linea tratteggiata taglia l'asse delle  $X$  per valori negativi, mentre per valori positivi di  $X$ , che sono gli unici possibili, la linea tratteggiata corrisponde a valori di  $\mu > 1$ ; quindi nel caso di propagazione longitudinale, per  $Y > 1$ , la riflessione avviene solo in corrispondenza del segno + della (3.5).

Nella Figura 3.4 si può vedere come cambia, al variare di  $Y$ , la direzione delle rette rappresentate in Figura 3.2 e 3.3; se  $Y$  varia da 0 a  $\infty$  la retta a tratto continuo ruota in senso antiorario da BAC a DAE mentre la retta tratteggiata ruota in senso orario da BAC a EAD.

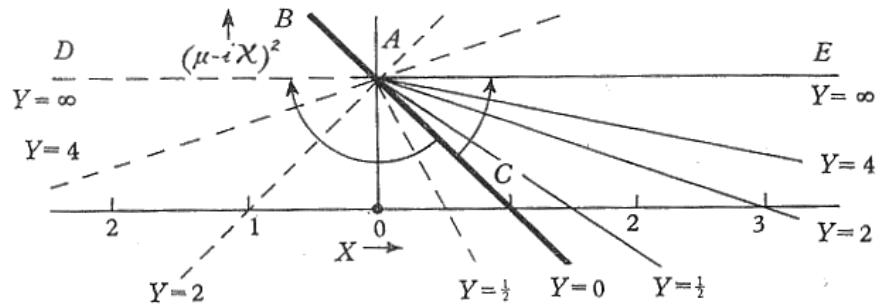


Figura 3.4

### 3.3 Presenza di un campo magnetico esterno: propagazione trasversale

Quando la normale al fronte d'onda è ortogonale alla direzione del campo magnetico  $Y_L=0$  e  $Y_T=Y$ ; in questo caso dalla (3.1) si ottengono le due equazioni

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (a) \quad n_{(u)}^2 &= 1 - X \\ (b) \quad n_{(l)}^2 &= 1 - \frac{X(1-X)}{(1-X-Y^2)} \end{aligned}$$

rispettivamente per il segno superiore e per il segno inferiore ( $u$  e  $l$  dall'inglese upper e lower). Come per il caso precedente in Figura 3.5 ed in Figura 3.6 vengono mostrati gli andamenti di  $n^2$ ,  $\mu^2$  e  $\chi^2$  in funzione di  $X$  per i casi in cui  $Y=1/2$  e  $Y=2$ .

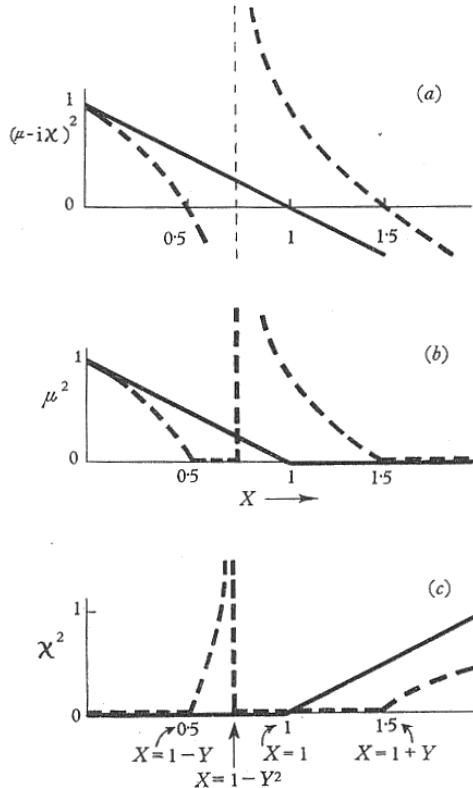
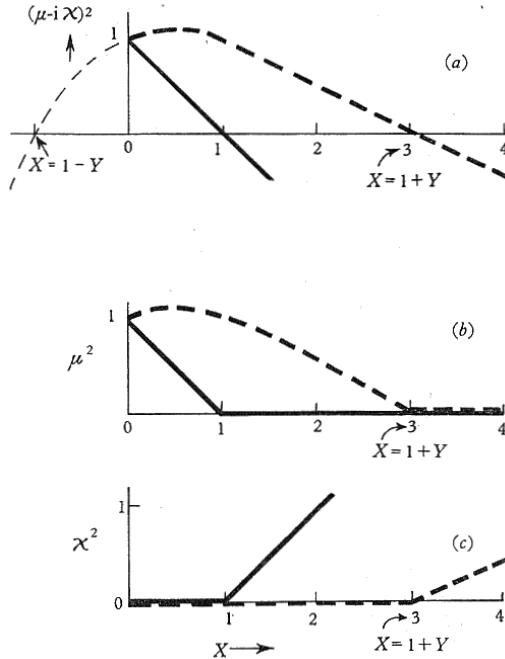


Figura 3.5 Propagazione trasversale con  $Y<1$  ( $Y=1/2$ ).



**Figura 3.6** Propagazione trasversale con  $Y>1$  ( $Y=2$ ).

La (3.6.a) corrisponde con la (3.2) e paragonando l'andamento della retta a tratto continuo di Figura 3.1 con quello delle rette a tratto continuo delle Figure 3.5 e 3.6 si vede che l'onda corrispondente al segno superiore corrisponde con quella che si ha in assenza di campo magnetico; tale onda viene chiamata *onda ordinaria*.

La (3.6.b) origina una curva che passa attraverso  $n=1$  per  $X=0$  e  $X=1$ , taglia l'asse  $X$  per  $X=1 \pm Y$  e, nel caso  $Y=1/2$ , ha un asintoto verticale per  $X=1-Y^2$ ; inoltre si vede come l'andamento di tale curva sia molto differente per  $Y=1/2$  e per  $Y=2$ . È chiaro quindi come la propagazione dell'onda rappresentata dalle curve tratteggiate sia fortemente influenzata dal campo magnetico costante; si parla in questo caso di *onda straordinaria*.

### 3.4 Presenza di un campo magnetico esterno: caso generale

Quando  $Y=1/2$  le Figure 3.2 e 3.5 rappresentano le curve che si ottengono nel caso in cui la propagazione è rispettivamente longitudinale e trasversale. Nel momento in cui la direzione di propagazione dell'onda varia ci si aspetterebbe una variazione continua fra le curve di Figura 3.2 e quelle di Figura 3.5; in realtà la situazione non è così semplice.

Risolvendo l'equazione (3.1) si ricava che per il segno - si ha  $n^2=0$  per  $X=1 \pm Y$ , si ha un asintoto verticale per  $X=(1-Y^2)/(1-Y_L^2)$  e  $n^2=1$  quando  $X=1$ ; per il segno + invece  $n^2=0$  per  $X=1$ , come accade in assenza di un campo magnetico esterno.

NOTA: verranno di seguito calcolati gli zeri della (3.1).

Ponendo  $n^2=0$  dalla (3.1) si ha

$$(n.3.1) \quad 1 - \frac{X}{1 - \frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{(1-X)} \pm \left[ \frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1-X)^2} + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

da cui

$$(n.3.2) \quad X = 1 - \frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{(1-X)} \pm \left[ \frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1-X)^2} + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(n.3.3) \quad X - 1 = -\frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{(1-X)} \pm \left[ \frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1-X)^2} + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(n.3.4) \quad 1 - X = \frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{(1-X)} \mp \left[ \frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1-X)^2} + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(n.3.5) \quad (1-X)^2 - \frac{Y_T^2}{2} = \mp \left[ \frac{Y_T^4}{4} + (1-X)^2 Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

ed elevando ambo i membri al quadrato

$$(n.3.6) \quad (1-X)^4 + \frac{Y_T^4}{4} - (1-X)^2 Y_T^2 = \frac{Y_T^4}{4} + (1-X)^2 Y_L^2,$$

$$(n.3.7) \quad (1-X)^2 \left[ (1-X)^2 - (Y_T^2 + Y_L^2) \right] = 0,$$

e quindi

$$(n.3.8) \quad (1-X)^2 \left[ (1-X)^2 - Y^2 \right] = 0.$$

Le soluzioni della (n.3.8) sono

$$(n.3.9) \quad X = 1 \text{ e } X = 1 \pm Y;$$

bisogna a questo punto vedere queste soluzioni a quale dei due segni della (n.3.1) corrispondono. Per fare questo si considera il primo membro della (n.3.5) e si studia quando è  $\geq 0$  e quando è  $< 0$ . Per fare questo ovviamente si calcolano gli zeri e quindi

$$(n.3.10) \quad (1-X)^2 = \frac{Y_T^2}{2},$$

da cui

$$(n.3.11) \quad 1 - X = \pm \frac{|Y_T|}{\sqrt{2}},$$

e da questo si vede che quando

$$(n.3.12) \quad X < 1 - \frac{|Y_T|}{\sqrt{2}} \text{ e } X > 1 + \frac{|Y_T|}{\sqrt{2}}$$

il primo membro della (n.3.5) è positivo mentre quando

$$(n.3.13) \quad 1 - \frac{|Y_T|}{\sqrt{2}} < X < 1 + \frac{|Y_T|}{\sqrt{2}}$$

il primo membro della (n.3.5) è negativo. Ne deriva che dato che

$$(n.3.14) \quad 1 - Y < 1 - \frac{|Y_T|}{\sqrt{2}} \text{ e } 1 + Y > 1 + \frac{|Y_T|}{\sqrt{2}},$$

e visto che il doppio segno della (n.3.5) è invertito rispetto a quello della (n.3.1), la soluzione  $X=1$  corrisponde al segno (+) della (n.3.1) mentre le soluzioni  $X=1 \pm Y$  corrispondono al segno (-) della (n.3.1).

Per quanto riguarda gli zeri  $X=1 \pm Y$  si ottengono in corrispondenza le seguenti due frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$

$$(n.3.15) \quad \begin{cases} X = 1 + Y \Rightarrow \frac{\omega_N^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_H}{\omega} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_N^2 + \frac{\omega_H^2}{4}} - \frac{\omega_H}{2} \\ X = 1 - Y \Rightarrow \frac{\omega_N^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_H}{\omega} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\omega_N^2 + \frac{\omega_H^2}{4}} + \frac{\omega_H}{2} \end{cases}.$$


---

Gli andamenti di  $n^2$ ,  $\mu^2$  e  $\chi^2$  in funzione di  $X$  per i casi in cui  $Y < 1$  e  $Y > 1$  sono rappresentati in Figura 3.7 e Figura 3.8.

Dalla Figura 3.7 si vede che la riflessione dell'onda ordinaria (modo di propagazione corrispondente al segno +) si ha per  $X=1$  mentre la riflessione dell'onda straordinaria (modo di propagazione corrispondente al segno -) si ha per  $X=1 \pm Y$ ; l'asintoto  $X=(1-Y^2)/(1-Y_L^2)$  è relativo al modo di propagazione straordinario. Il modo di propagazione ordinario ha un asintoto obliquo in  $n^2-1=-X/(1-Y_L)$ , mentre il modo di propagazione straordinario ha un asintoto obliquo in  $n^2-1=-X/(1+Y_L)$ .

La degenerazione del caso generale nel caso trasversale si ottiene facendo il limite  $Y_L \rightarrow 0$ ; l'asintoto verticale si sposta di conseguenza in  $X=(1-Y^2)$  e gli zeri continuano a trovarsi in  $X=1$  per il segno + e in  $X=1 \pm Y$  per il segno -.

La degenerazione del caso generale nel caso longitudinale si ottiene facendo il limite  $Y_T \rightarrow 0$ ; l'asintoto verticale non c'è più, appare una discontinuità in  $X=1$  e gli zeri continuano a trovarsi in  $X=1$  per il segno + e in  $X=1 \pm Y$  per il segno -.

Dalla Figura 3.8 si vede che la riflessione dell'onda ordinaria si ha per  $X=1$  mentre la riflessione dell'onda straordinaria si ha solo per  $X=1+Y$ ; si ha un asintoto per  $X=(1-Y^2)/(1-Y_L^2)$  che quando  $|Y_L| > 1$  è relativo al modo di propagazione ordinario per valori di  $X$  positivi, mentre quando  $|Y_L| < 1$  è relativo al modo di propagazione straordinario per valori di  $X$  negativi.

La degenerazione del caso generale nel caso trasversale si ottiene facendo il limite  $Y_L \rightarrow 0$ ; l'asintoto verticale si sposta di conseguenza in  $X=(1-Y^2)$ , ma questa volta perde di significato in quanto corrisponderebbe ad un valore negativo di  $X$ ; gli zeri continuano a trovarsi in  $X=1$  per il segno + e in  $X=1+Y$  per il segno -.

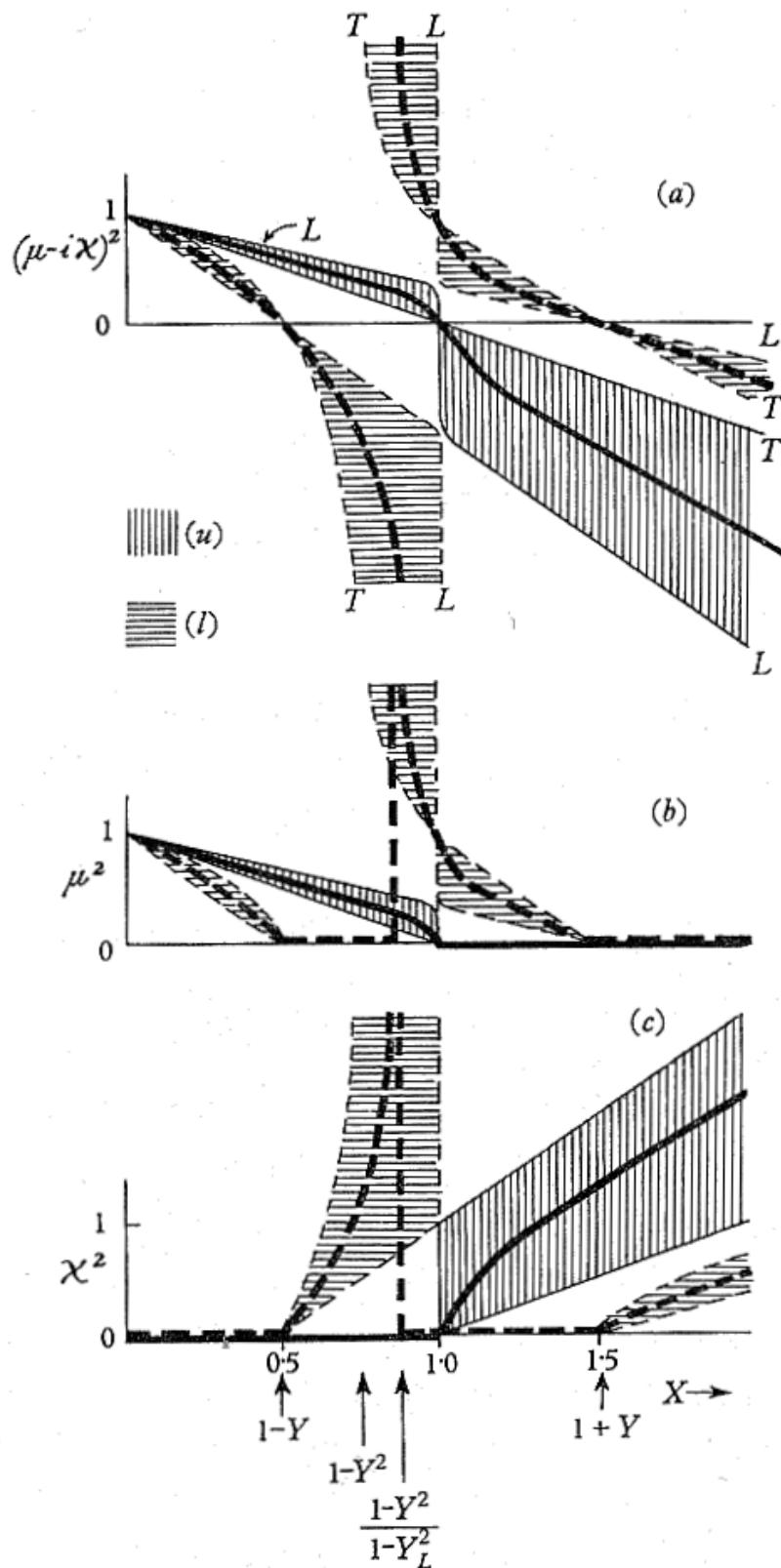
La degenerazione del caso generale nel caso longitudinale si ottiene facendo il limite  $Y_T \rightarrow 0$ ; l'asintoto verticale non c'è più, appare una discontinuità in  $X=1$  e gli zeri continuano a trovarsi in  $X=1$  per il segno + e in  $X=1+Y$  per il segno -.

Vale la pena notare che il ramo di curva ABC della Figura 3.8 appare quando  $|Y_L|>1$ , ha un asintoto verticale per  $X=(1-Y^2)/(1-Y_L^2)$  e un asintoto obliquo per  $n^2-1=X/(-Y_L/-1)$ . In particolare la Figura 3.9 fa vedere come varia il ramo di curva ABC per diversi valori di  $|Y_L|$  e si vede come tale curva tende sempre più alla spezzata DEF all'aumentare di  $|Y_L|$ , ossia man mano che la propagazione diventa longitudinale.

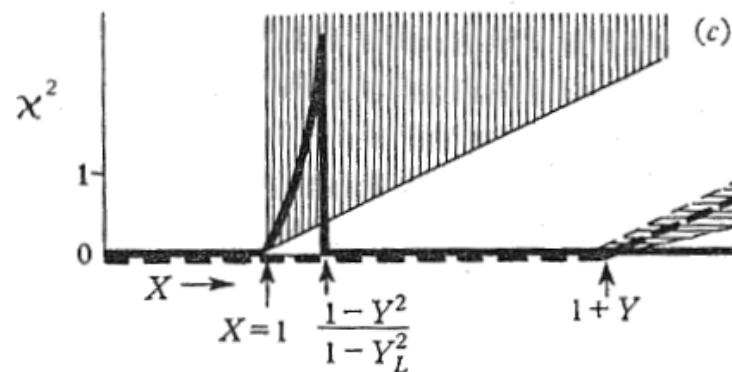
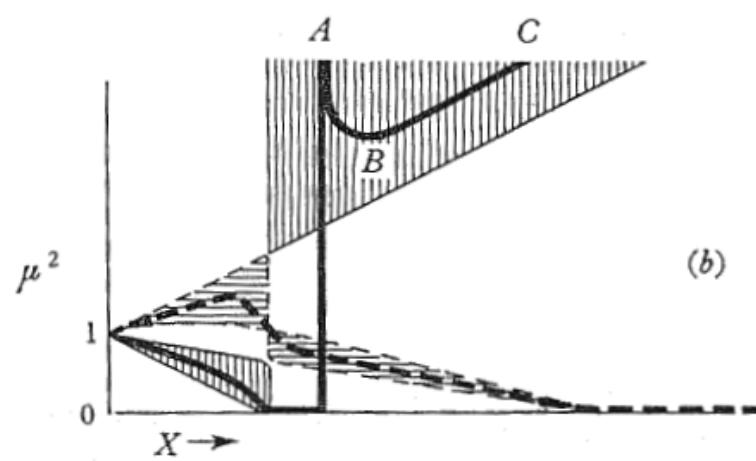
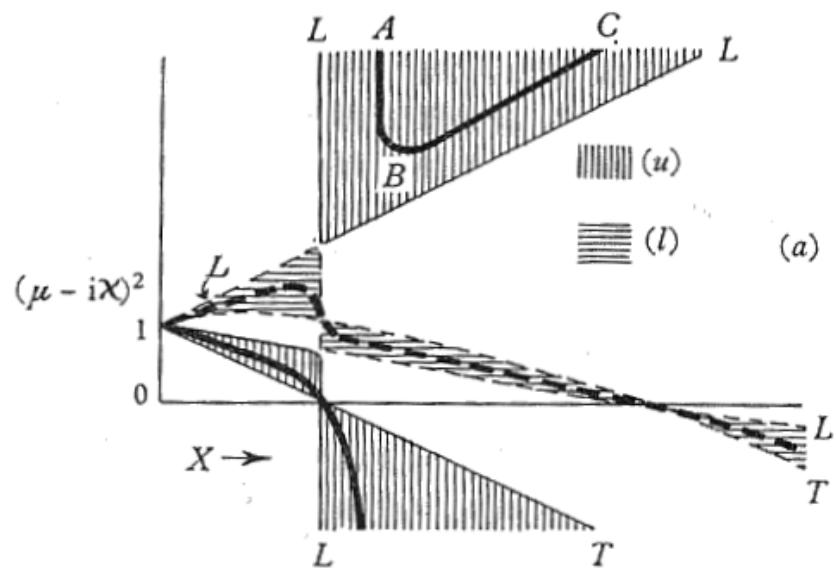
In conclusione si vuole porre l'attenzione sul fatto che, tranne che nel caso di propagazione esattamente longitudinale (ossia quando la normale al fronte d'onda ha la stessa direzione del campo magnetico esterno), il modo di propagazione ordinario è rappresentato, in assenza di collisioni, dal segno +. Infatti nessuna delle due curve continue, rappresentate in Figura 3.2 e Figura 3.3, relative ai modi di propagazione longitudinale è simile a quella di Figura 3.1 che si ha in assenza di campo magnetico esterno e che definisce il modo di propagazione ordinario. Di contro, le curve continue rappresentate in Figura 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8, relative agli altri modi di propagazione, si possono ritenere simili a quella di Figura 3.1 (non fosse altro per il fatto di intersecare tutte l'asse delle  $X$  in 1, il che corrisponde con la condizione di riflessione del modo di propagazione ordinario).

In generale comunque, in assenza di collisioni, il caso di propagazione longitudinale presenta qualche stranezza. Infatti se le curve limite di Figura 3.7 e 3.8 corrispondenti alla propagazione trasversale vengono paragonate con le curve di Figura 3.5 e 3.6 si vede che sono identiche, mentre se le curve limite di Figura 3.7 e 3.8 corrispondenti alla propagazione longitudinale vengono paragonate con le curve di Figura 3.2 e 3.3 si vede che queste al contrario non coincidono.

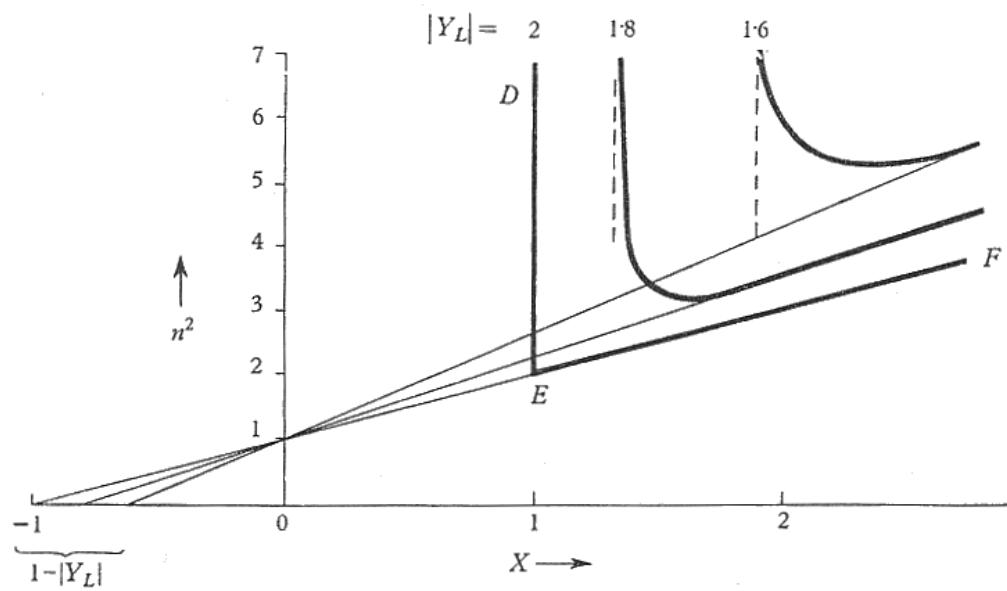
Più avanti questa stranezza verrà chiarita e si vedranno le modifiche che bisognerà introdurre quando vengono considerate le collisioni; verrà inoltre mostrato come risultino necessarie ulteriori considerazioni nell'assegnazione del nome ordinario/straordinario al modo di propagazione ondoso quando  $X>1$ .



**Figura 3.7** Caso generale per  $Y < 1$  ( $Y = 1/2$ ). La curva in grassetto si riferisce ad una propagazione corrispondente ad un angolo  $\theta = 45^\circ$ .



**Figura 3.8** Caso generale per  $Y>1$  ( $Y=2$ ). La curva in grassetto si riferisce ad una propagazione corrispondente ad un angolo  $\theta=45^\circ$ .



**Figura 3.9**

## 4. La polarizzazione delle onde

La polarizzazione delle due onde caratteristiche, con la normale al fronte d'onda in una certa direzione, viene espressa tramite il *fattore di polarizzazione dell'onda* (1.25)

$$(4.1) \quad R = -\frac{H_y}{H_x} = \frac{E_x}{E_y},$$

dove  $R$  corrisponde con l'espressione (1.48) qui di seguito riportata

$$(4.2) \quad R = -\frac{i}{Y_L} \left[ \frac{Y_T^2}{2(1-X-iZ)} \mp \left( \frac{Y_T^4}{4(1-X-iZ)^2} + Y_L^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Il segno della quantità

$$(4.3) \quad Y_L = \frac{(\mu_0 e H_0 \cos \vartheta)}{m \omega}$$

dipende dal segno della carica  $e$  e dall'angolo  $\theta$  tra la normale al fronte d'onda e il campo magnetico esterno; detto questo la (4.2) viene riscritta come

$$(4.4) \quad R = -i \left[ \frac{Y_T^2}{2Y_L(1-X-iZ)} \mp \left( \frac{Y_T^4}{4Y_L^2(1-X-iZ)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

La quantità

$$(4.5) \quad \frac{Y_T^2}{2Y_L} = \left( \frac{\mu_0 H_0 e}{m \omega} \right) \left( \frac{\sin^2 \vartheta}{2 \cos \vartheta} \right)$$

diventa a questo punto importante.

È conveniente adesso scrivere

$$(4.6) \quad \omega_c = \left( \frac{\mu_0 H_0 e}{m} \right) f(\vartheta),$$

dove

$$(4.7) \quad f(\vartheta) = \frac{\sin^2 \vartheta}{2 \cos \vartheta},$$

in modo tale che

$$(4.8) \quad \frac{Y_T^2}{2Y_L} = \frac{\omega_c}{\omega}.$$

L'andamento di  $f(\theta)$  è rappresentato in Figura 4.1.

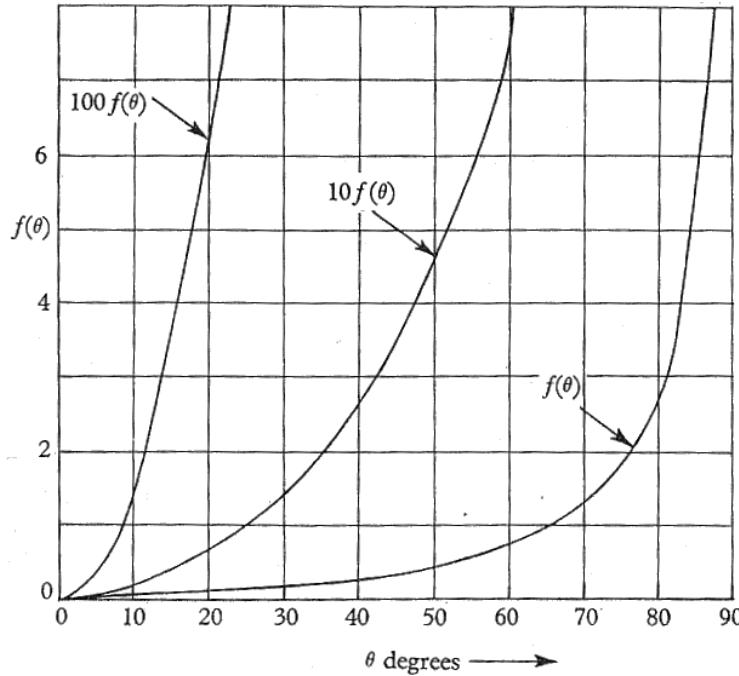


Figura 4.1

Considerando la (4.8), la (4.4) può essere riscritta come

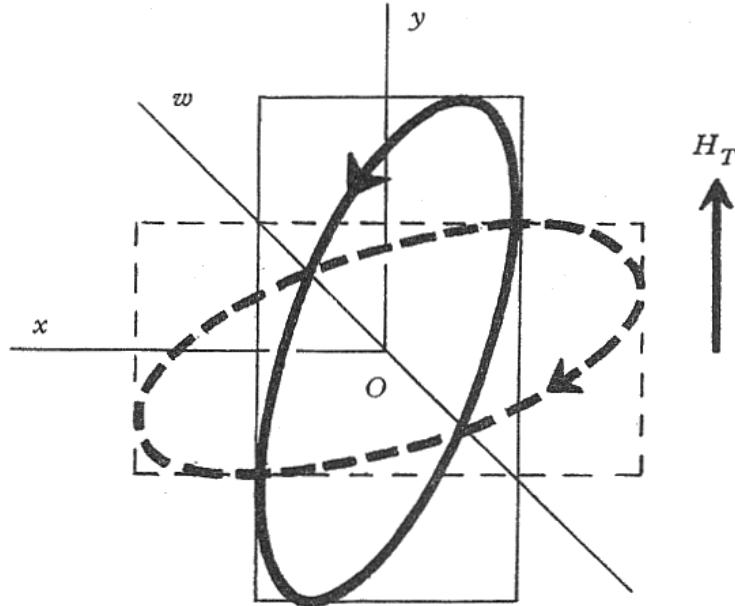
$$(4.9) \quad R = -i \left[ \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_c}(1-X) - i \frac{\nu}{\omega_c}} \mp \left( \left( \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_c}(1-X) - i \frac{\nu}{\omega_c}} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right];$$

In generale  $R$  è complesso, il che vuol dire che il vettore  $\mathbf{H}$  (dell'onda elettromagnetica) descrive un ellisse, inclinata rispetto agli assi  $x$  e  $y$ . Tali assi, detti *direzioni principali*, si trovano nel fronte d'onda, con l'asse  $x$  perpendicolare al piano contenente il campo magnetico esterno e l'asse  $y$  invece contenuto in tale piano (vedi Figura 1.2). L'ellisse è contenuta in un rettangolo con i lati, il cui rapporto è  $|R|$ , paralleli alle direzioni principali.

L'equazione (4.9) mostra che le due onde caratteristiche, corrispondenti ai due segni, hanno differenti polarizzazioni e se con  $R_u$  e  $R_l$  si identificano i valori di  $R$  corrispondenti al segno superiore e inferiore si ha

$$(4.10) \quad R_u R_l = 1,$$

il che vuol dire che le due ellissi di polarizzazione sono come in Figura 4.2, ossia si può ottenere un'ellisse dall'altra per riflessione rispetto alla linea  $Ow$  (che forma un angolo di  $45^\circ$  con le direzioni principali) e invertendone la direzione di rotazione.



**Figura 4.2** Le polarizzazioni del campo elettrico nel piano del fronte d'onda.  $Ox$  e  $Oy$  sono le direzioni principali e la proiezione del campo magnetico esterno è lungo  $Oy$ . La normale al fronte d'onda è entrante nel foglio lungo  $Oz$ . L'ellisse dell'onda ordinaria è rappresentata a tratto continuo mentre l'ellisse dell'onda straordinaria è rappresentata a tratto tratteggiato.

Soffermando l'attenzione sul parametro  $\omega_c$  introdotto con la (4.6) si può vedere che il suo segno è determinato dal segno di  $e$  e dalla direzione del campo magnetico esterno. Il suo modulo è indipendente dalla frequenza dell'onda elettromagnetica e varia con l'angolo  $\theta$ , come mostrato in Figura 4.1, valendo zero in corrispondenza di una propagazione longitudinale e infinito in corrispondenza di una propagazione trasversale. In particolare  $\omega_c$  gioca un ruolo molto importante nella determinazione della polarizzazione quando  $X=1$  (condizione che nel caso generale corrisponde con la riflessione del raggio ordinario). Quando  $X=1$  la (4.9) diventa

$$(4.11) \quad R(1) = \frac{\omega_c}{v} \pm i \left[ 1 - \left( \frac{\omega_c}{v} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ per } \omega_c \text{ positivo,}$$

e

$$(4.12) \quad R(1) = \frac{\omega_c}{v} \mp i \left[ 1 - \left( \frac{\omega_c}{v} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ per } \omega_c \text{ negativo;}$$

$\omega_c$  è negativo se si considerano elettroni e quando c'è una componente positiva del campo magnetico esterno così come quando un'onda si propaga verso il basso attraverso la ionosfera nell'emisfero nord.

NOTA: modulo e argomento di un numero complesso.

Dato un numero complesso  $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$ ,  $r=(x^2+y^2)^{1/2}$  è il *modulo* (o *valore assoluto*) di  $z$  e  $\varphi=\arctan(y/x)$  è l'*argomento* di  $z$ . Un numero complesso, come mostrato in Figura n.4.1, può essere visto come un punto del piano cartesiano.

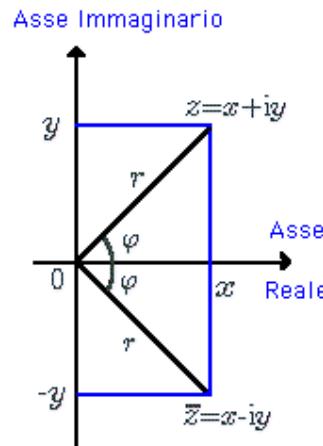


Figura n.4.1 Rappresentazione cartesiana di un numero complesso.

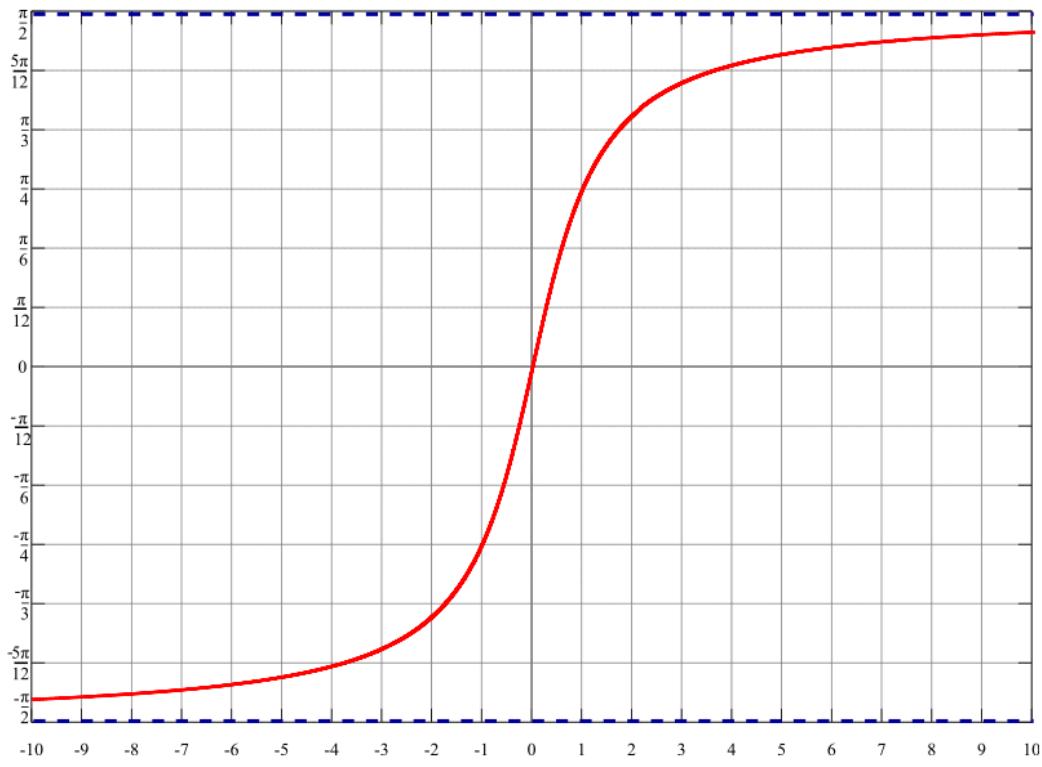


Figura n.4.2 Grafico della funzione  $y=\arctan(x)$ .

In Figura 4.3 è illustrato l'andamento di  $|R(1)|$  e  $\arg R(1)$  in funzione di  $|\omega_c/v|$  nel caso in cui  $\omega_c$  sia negativo, e sono anche disegnate le corrispondenti ellissi rispettivamente per il segno superiore e per il segno inferiore.

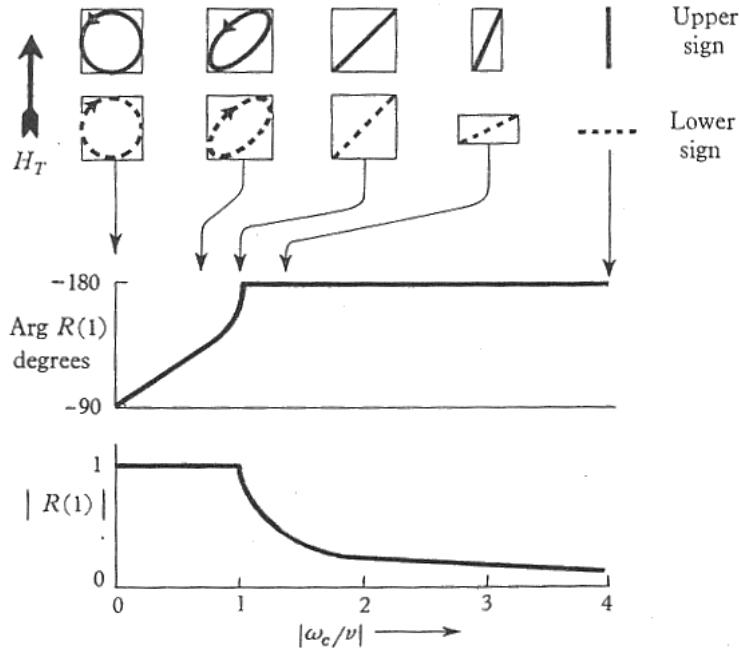


Figura 4.3

Se  $\omega_c$  fosse positivo, come accade nell'emisfero sud,  $\arg R(1)$  sarebbe traslato di  $180^\circ$ .

La Figura 4.3 (gli andamenti in figura si riferiscono ai segni – della (4.12) e (4.14) rispettivamente per  $|\omega_c/v| < 1$  e per  $|\omega_c/v| > 1$ ) mostra che, quando  $|\omega_c/v| < 1$ ,  $R(1)$  è complesso, con  $|R(1)| = 1$ , cosicché le ellissi di polarizzazione sono entrambe contenute in un quadrato i cui lati sono paralleli alle direzioni principali (il sistema di riferimento considerato è sempre quello di Figura 1.2) e i sensi di rotazione sono opposti; quando  $|\omega_c/v| = 1$ ,  $|R(1)| = 1$  e le due ellissi degenerano in una linea inclinata di  $45^\circ$  rispetto alle direzioni principali (la polarizzazione quindi da ellittica diventa lineare); quando  $|\omega_c/v| > 1$

$$(4.13) \quad R(1) = \frac{\omega_c}{v} \mp \left[ \left( \frac{\omega_c}{v} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ per } \omega_c \text{ positivo,}$$

e

$$(4.14) \quad R(1) = \frac{\omega_c}{v} \pm \left[ \left( \frac{\omega_c}{v} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ per } \omega_c \text{ negativo;}$$

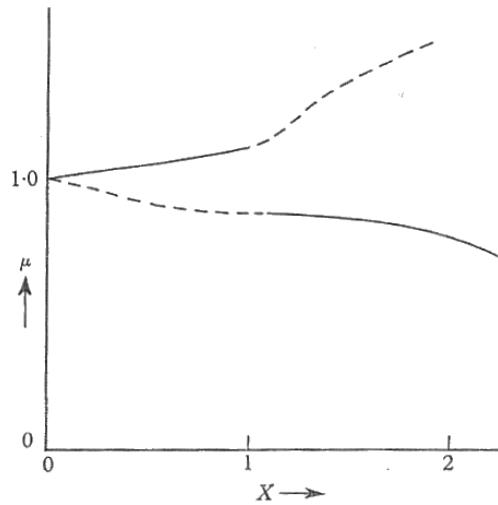
$R(1)$  è (come nel caso  $|\omega_c/v| = 1$ ) reale e le due polarizzazioni sono rappresentate da linee rette che formano angoli uguali con la bisettrice delle direzioni principali (in questo caso le linee non sono più contenute in un quadrato come quando  $|\omega_c/v| = 1$  in quanto  $R(1) \neq 1$ ).

La teoria magnetoionica, così come sviluppata fino ad ora, pretende di descrivere unicamente la natura di onde caratteristiche che si propagano in un mezzo omogeneo e, di conseguenza, per descrivere le due onde è sufficiente dire se si sta considerando il segno superiore o inferiore delle equazioni. In pratica tale teoria è spesso utilizzata per discutere la propagazione delle onde in un mezzo disomogeneo e, in particolare, in un mezzo in cui la frequenza di collisione e il campo magnetico esterno sono approssimativamente costanti ma la

densità elettronica cambia. Questo problema può essere risolto propriamente solo tramite un'analisi completa della propagazione delle onde che risulta essere piuttosto complicata. Più avanti verrà mostrato un risultato approssimato di questa analisi in cui si vedrà che, se la densità elettronica varia lentamente, un'onda che risulta essere caratteristica in un punto continua ad essere un'onda caratteristica una volta che si propaga in un altro punto. Se quindi si graficassero  $n$  e  $R$  in funzione di  $X$ , allora ci si aspetterebbe che queste due quantità varino con continuità al crescere di  $X$  (questo perché le proprietà di un'onda caratteristica cambiano con continuità).

Ora, se si graficano  $n$  e  $R$  come funzione di  $X$  (tramite la (1.48) e la (1.49)), e ci si riferisce ad un solo segno delle equazioni, si trova che sotto certe condizioni tali grandezze presentano una discontinuità in corrispondenza di  $X=1$  (vedi Figura 4.4). Booker (1934) ha studiato tale fenomeno e ha mostrato che si possono stabilire le seguenti regole:

- a) se  $|\omega_c/v| > 1$  allora  $n$  e  $R$  sono continui al crescere di  $X$ , considerando sempre lo stesso segno delle equazioni;
- b) se  $|\omega_c/v| < 1$  allora  $n$  e  $R$  sono continui al crescere di  $X$ , solo se nel passaggio per  $X=1$  viene cambiato segno nelle equazioni (come è il caso della Figura 4.4).

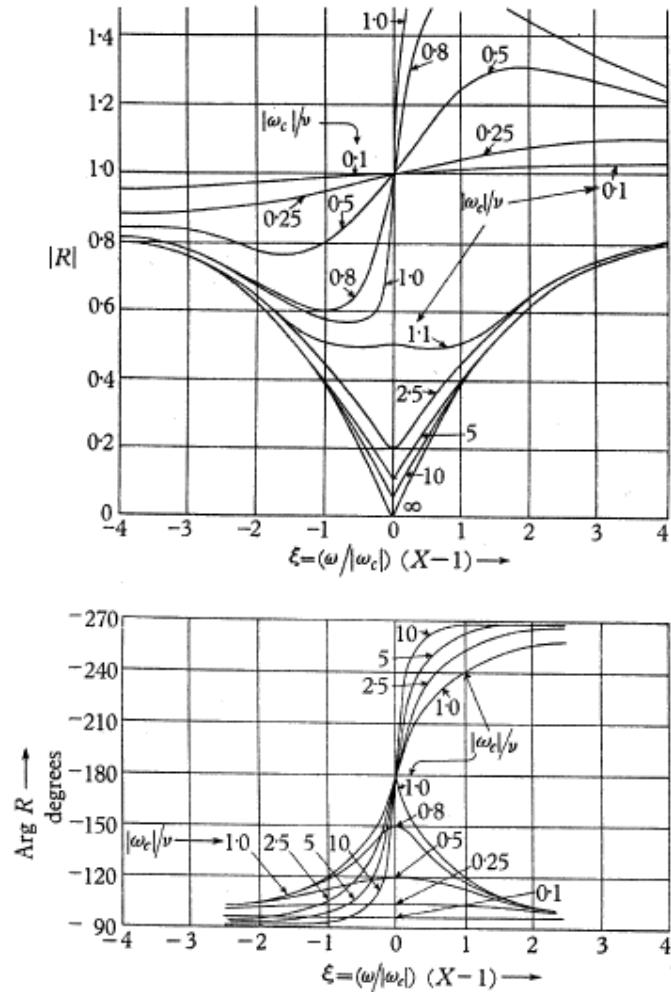


**Figura 4.4** Valori di  $\mu(X)$  calcolati tramite la (1.49) per il caso in cui  $Y=3$ ,  $Z=0.3$ ,  $\theta=19^\circ$ ,  $|\omega_c/v|=0.52$ . La linea a tratto continuo si riferisce al segno superiore, mentre quella tratteggiata al segno inferiore.

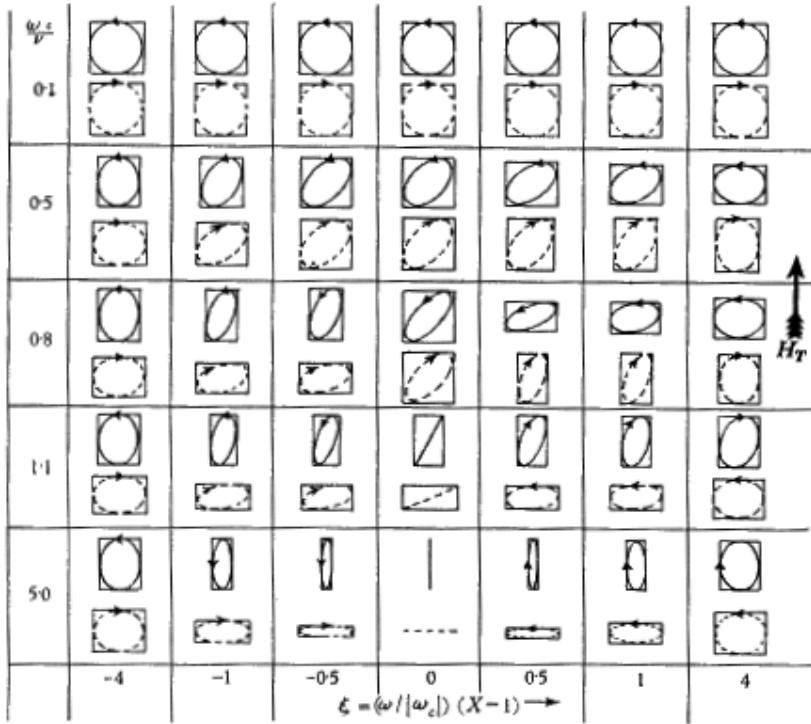
Si è visto come, in assenza di collisioni, le due onde caratteristiche vengono chiamate onda ordinaria, riferendoci al segno superiore, e onda straordinaria, riferendoci al segno inferiore; adesso nel caso  $v \neq 0$  per  $X < 1$  l'onda ordinaria è sempre rappresentata dal segno superiore, mentre per  $X > 1$ , se  $|\omega_c/v| > 1$ , l'onda ordinaria è ancora rappresentata dal segno superiore ma, se  $|\omega_c/v| < 1$ , l'onda ordinaria è rappresentata dal segno inferiore. Queste considerazioni possono chiarire l'apparente discordanza che vi è tra le Figure 3.2 e 3.3 e i limiti longitudinali delle Figure 3.7 e 3.8. Infatti osservando tali figure si vede che l'onda ordinaria è rappresentata dalla curva continua in due differenti modi. Questo accade perché nel caso longitudinale  $\omega_c=0$  e, in assenza di collisioni,  $\omega_c/v$  risulta essere indeterminato. Per ottenere dei risultati che abbiano senso bisogna quindi considerare dei casi limite. Se si considera ad esempio  $v=0$ , ma la propagazione non proprio longitudinale, si ha  $|\omega_c/v| > 1$  e nelle Figure 3.7 e 3.8 è corretto mantenere lo stesso segno dappertutto e l'onda ordinaria è sempre rappresentata dalla linea a tratto continuo. Se invece si suppone che la propagazione è esattamente longitudinale, quindi  $\omega_c=0$ , ma che  $v$  non sia proprio uguale a zero, allora  $|\omega_c/v| < 1$  e un'onda caratteristica è rappresentata dalle curve delle Figure 3.7 e 3.8 solo se passando per  $X=1$  si considera la curva di segno opposto; in questo caso le curve che rappresentano l'onda

ordinaria e straordinaria corrispondono con quelle delle Figure 3.2 e 3.3. Praticamente in questo caso, rifacendoci alle Figure 3.7 e 3.8, per  $X < 1$  l'onda ordinaria è rappresentata dalla curva a tratto continuo mentre per  $X > 1$  l'onda ordinaria è rappresentata dalla curva tratteggiata.

Curve che mostrano l'andamento di  $|R(X)|$  e di  $\arg R(X)$ , per diversi valori di  $|\omega_c/v|$ , sono mostrate in Figura 4.5 per un'onda ordinaria nel caso in cui  $\omega_c$  è negativo. In Figura 4.6 sono rappresentate alcune ellissi derivanti dai dati di Figura 4.5.



**Figura 4.5**  $|R(X)|$  e di  $\arg R(X)$ , per diversi valori di  $|\omega_c/v|$ , per un'onda ordinaria nel caso in cui  $\omega_c$  è negativo. Sulle ascisse è graficata la quantità  $\xi = (\omega/\omega_c)(X-1)$ . Il punto  $\xi = 0$  corrisponde a  $X = 1$  e le polarizzazioni sono quelle già discusse in Figura 4.3. Valori negativi di  $\xi$  corrispondono a valori di  $X < 1$  e  $\xi = |\omega/\omega_c|$  corrisponde a  $X = 0$ .



**Figura 4.6** Rappresentazioni della polarizzazione del campo elettrico per diversi valori di  $|\omega_c/v|$  e  $\xi = (|\omega|/\omega_c)(X-1)$ . La linea continua si riferisce all'onda ordinaria mentre quella tratteggiata all'onda straordinaria.

Ne seguono le seguenti interessanti considerazioni:  
quando  $|\omega_c/v| < 1$

$$(4.15) \quad \begin{aligned} |R(\xi)| &= (|R(-\xi)|)^{-1} \\ \arg R(\xi) &= \arg R(-\xi), \end{aligned}$$

e quindi la direzione di rotazione è la stessa per ogni valore di  $\xi$ ;  
quando  $|\omega_c/v| < 1$

$$(4.16) \quad \begin{aligned} |R(\xi)| &= (|R(-\xi)|) \\ \arg R(\xi) &= -\arg R(-\xi), \end{aligned}$$

e quindi la direzione di rotazione cambia per valori positivi e negativi di  $\xi$ .

## 5. Approssimazioni quasi longitudinale (QL) e quasi trasversale (QT)

Le equazioni (1.48) e (1.49) che costituiscono la teoria magnetoionica per l'indice di rifrazione complesso e per la polarizzazione sono piuttosto complicate.

Applicando queste a problemi di propagazione ionosferica è conveniente ricorrere a due approssimazioni, una delle quali si applica quando le onde si propagano in modo quasi longitudinale (si parla in questo caso di approssimazione QL) mentre l'altra si applica quando le onde si propagano in modo quasi trasversale (si parla in questo caso di approssimazione QT) rispetto al campo magnetico esterno. Le condizioni di applicazione di tali approssimazioni sono le seguenti:

$$(5.1) \quad \frac{Y_T^4}{4Y_L^2} \ll |(1 - X - iZ)^2| \quad (\text{QL}),$$

e

$$(5.2) \quad \frac{Y_T^4}{4Y_L^2} \gg |(1 - X - iZ)^2| \quad (\text{QT}).$$

Applicando le (5.1) e (5.2) alle (1.48) e (1.49) si ottengono le seguenti espressioni per l'approssimazione QL

$$(5.3) \quad n_{\text{QL}}^2 = 1 - \frac{X}{(1 - iZ \pm |Y_L|)}$$

$$(5.4) \quad R_{\text{QL}} = \mp i,$$

e le seguenti espressioni per l'approssimazione QT relativamente al segno superiore

$$(5.5) \quad n_{\text{QT(u)}}^2 = 1 - \frac{X}{[1 - iZ + (1 - X - iZ) \cot^2 \vartheta]}$$

$$(5.6) \quad R_{\text{QT(u)}} = 0,$$

---

NOTA: calcolo della (5.5).

$$\begin{aligned} n_{\text{(u)}}^2 &= 1 - \frac{X}{1 - iZ - \frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{(1 - X - iZ)} + \left[ \frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1 - X - iZ)^2} + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \\ &= 1 - \frac{X}{1 - iZ - \left\{ \frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{(1 - X - iZ)} \right\} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{4Y_L^2(1 - X - iZ)^2}{Y_T^4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}, \end{aligned}$$

e considerando l'approssimazione QT e sviluppando in serie di Taylor il termine sotto radice si ottiene

$$\begin{aligned}
 n_{\text{QT(u)}}^2 &= 1 - \frac{X}{1 - iZ - \left\{ \frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{(1-X-iZ)} \right\} \left\{ \frac{-2Y_L^2(1-X-iZ)^2}{Y_T^4} \right\}} = \\
 &= 1 - \frac{X}{1 - iZ + (1-X-iZ) \left( \frac{Y_L^2}{Y_T^2} \right)} = 1 - \frac{X}{[1 - iZ + (1-X-iZ)\cot^2 \vartheta]}.
 \end{aligned}$$


---

e al segno inferiore

$$(5.7) \quad n_{\text{QT(l)}}^2 = 1 - \frac{X}{\left[ 1 - iZ - \frac{Y_T^2}{(1-X-iZ)} \right]}$$

$$(5.8) \quad R_{\text{QT(l)}} = \infty,$$

dove (u) e (l) stanno a significare superiore e inferiore (dall'inglese "upper" e "lower"); la polarizzazione  $R$  è quella che si avrebbe in corrispondenza di valori negativi di  $Y_L$  e quindi in corrispondenza di onde che si propagano verso il basso nell'emisfero nord.

Spesso nella (5.5) si commette l'errore di omettere il termine  $(1-X-iZ)\cot^2 \theta$ . Le espressioni (5.4), (5.6) e (5.8) per la polarizzazione mostrano che in approssimazione QL le due onde caratteristiche sono polarizzate circolarmente mentre in approssimazione QT sono polarizzate linearmente lungo le direzioni principali.

Ora, se  $\theta$  è l'angolo tra la normale al fronte d'onda e il campo magnetico terrestre le condizioni (5.1) e (5.2) relative alle due approssimazioni possono essere scritte

$$(5.9) \quad \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \ll (1-X)^2 + Z^2,$$

dove  $\omega_c$  è definito dalla (4.6) come  $\omega_c = (\mu_0 H_0 e / m) f(\theta)$ .

Quindi in generale le condizioni di approssimazione dipendono non solo dalla girofrequenza  $\omega_H$  e dall'angolo  $\theta$  di propagazione, ma anche da  $X$  e da  $Z$ . Decidere quindi se la propagazione di un'onda può essere discussa in termini di approssimazione QL o QT non dipende solo dalla direzione della normale al fronte d'onda rispetto al campo magnetico esterno ma anche dalla densità elettronica e dalla frequenza di collisione; in alcune circostanze si può infatti parlare di approssimazione QL anche se  $\theta$  non è piccolo.

### 5.1 Approssimazioni QL e QT nel caso $X=1$

Se  $Z$  viene considerato costante, nel caso  $X=1$  per l'approssimazione QL si ha

$$(5.10) \quad \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \ll Z^2, \quad (\text{QL nel caso } X = 1)$$

da cui

$$(5.11) \quad \omega_c^2 \ll \nu^2. \quad (\text{QL nel caso } X=1)$$

Dato che  $\omega_c$  dipende solo dal valore di  $H_0$  e dalla direzione di propagazione la condizione (5.11) è molto semplice ed inoltre tale condizione, valida per  $X=1$ , è valida a maggior ragione per tutti gli altri valori di  $X$  (questo si vede chiaramente dalla (5.9)). Nei casi numerici è ragionevole pensare che una buona approssimazione si ha assumendo che le diseguaglianze  $\ll$  e  $\gg$  sono soddisfatte nel momento in cui la quantità più grande è 9 volte la quantità più piccola e in questo caso per le due approssimazioni si ottiene:

$$(5.12) \quad \nu > 3|\omega_c| \Rightarrow \frac{\nu}{\omega} > 3 \frac{|\omega_c|}{\omega} \Rightarrow Z > 3 \frac{|\omega_c|}{\omega} \Rightarrow Z > 3Y|f(\vartheta)|; \quad (\text{QL nel caso } X=1)$$

$$(5.13) \quad \nu < \frac{1}{3}|\omega_c| \Rightarrow \frac{\nu}{\omega} < \frac{1}{3} \frac{|\omega_c|}{\omega} \Rightarrow Z < \frac{1}{3} \frac{|\omega_c|}{\omega} \Rightarrow Z < \frac{1}{3}Y|f(\vartheta)|. \quad (\text{QT nel caso } X=1)$$

### 5.2 Approssimazioni QL e QT nel caso $X \neq 1$

Se  $\nu < (1/3)|\omega_c|$  l'approssimazione QT è appropriata nel caso  $X=1$ ; adesso è necessario vedere qual è l'intorno di  $X=1$  nel quale tale approssimazione è ancora valida. Quando  $\nu < (1/3)|\omega_c|$  la diseguaglianza (5.9) per l'approssimazione QT può essere scritta

$$(5.14) \quad \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \gg (1-X)^2,$$

(infatti se  $\nu < (1/3)|\omega_c|$  allora  $Z^2 \ll (1/9)(\omega_c^2/\omega^2)$  e quindi nella (5.9)  $Z^2$  può essere trascurato); la (5.14) equivale a

$$(5.15) \quad Y|f(\vartheta)| > 3(1-X).$$

L'espressione (5.15) determina quindi l'intorno di  $X=1$  per il quale è valida l'approssimazione QT quando  $\nu < (1/3)|\omega_c|$ .

Per quanto appena detto si capisce che l'intorno di  $X=1$  per il quale è valida l'approssimazione QL, sempre nel caso  $\nu < (1/3)|\omega_c|$ , è rappresentato dalla seguente espressione

$$(5.16) \quad Y|f(\vartheta)| < \frac{1}{3}|(1-X)|.$$

È importante a questo punto trovare la condizione per cui è valida l'approssimazione QL quando  $X=1 \pm Y_L$  (questo perchè si è visto che, quando si assume la propagazione prettamente longitudinale, le riflessioni del raggio ordinario e straordinario avvengono proprio in corrispondenza di questi due valori di  $X$ ); dall'espressione (5.16) si ottiene in questo caso

$$(5.17) \quad \frac{1}{2}Y \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} < \frac{1}{3}Y \cos \vartheta \Rightarrow \tan^2 \vartheta < \frac{2}{3} \Rightarrow \vartheta < 40^\circ.$$

Quindi se  $\theta < 40^\circ$  è sempre possibile ragionare in termini di approssimazione QL quando  $X = 1 \pm Y_L$ ; se invece, quando  $X = 1 \pm Y_L$ , dovesse essere valida l'approssimazione QT dalla (5.15) si otterebbe  $\tan^2 > 6$  e quindi  $\theta > 68^\circ$ .

### 5.3 Regioni QL e regioni QT in un modello di ionosfera

Nella ionosfera terrestre sia  $X$  che  $Z$  variano con l'altezza e si capisce quindi come sia importante discutere dove le approssimazioni QL e QT possono essere usate. Si fa nel seguito riferimento ad un modello di ionosfera in cui la densità elettronica è pensata in termini della frequenza di plasma  $\omega_N$  tramite la linea CD di Figura 5.1 che rappresenta l'altezza alla quale  $X=1$  per onde di frequenza  $\omega$ , o meglio  $f$ , come mostrato dalle due scale dell'asse  $x$ . La frequenza di collisione è rappresentata in funzione dell'altezza dalla linea AB. Per  $\omega_c$  si prende un valore di  $4.7 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$  corrispondente a  $\theta = 20^\circ$  e  $f_H = 1.25 \text{ Mc/s}$  (ora tale valore di  $\omega_c$  è stato calcolato per  $\theta = 20^\circ$  ma bisogna considerare che, man mano che avanza, l'onda viene rifratta e quindi l'angolo  $\theta$  cambia; ne segue che il fatto di considerare per  $\omega_c$  un valore costante all'avanzare dell'onda rappresenta un'approssimazione). Le linee orizzontali HK e LM corrispondono ai livelli dove  $v = (1/3)\omega_c$  e dove  $v = 3\omega_c$ . Quindi lungo CE  $X = 1$  e  $v < (1/3)\omega_c$  cosicché è valida l'approssimazione QT, mentre lungo FD  $X = 1$  e  $v > 3\omega_c$  e quindi è valida l'approssimazione QL. Lontano dalla linea  $X = 1$  i limiti all'interno dei quali valgono le due approssimazioni sono dati dalle seguenti espressioni

$$(5.18) \quad \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \begin{cases} < \frac{1}{9} \\ > 9 \end{cases} \{ (1 - X)^2 + Z^2 \},$$

che si possono anche scrivere come

$$(5.19) \quad \omega_c^2 \begin{cases} < \frac{1}{9} \\ > 9 \end{cases} \{ (\omega^2 - \omega_N^2)^2 + v^2 \};$$

i corrispondenti confini sono rappresentati dalle curve passanti per E e per F. Quindi la Figura 5.1 mostra le regioni ionosferiche, indicate con QL e con QT, dove sono valide le due approssimazioni, mentre la zona ombreggiata indica una regione in cui nessuna delle due approssimazioni è valida.

Guardando la figura si può notare che per frequenze minori di quella corrispondente al punto G l'approssimazione QL è soddisfatta a qualsiasi altezza mentre per frequenze più grandi di quella corrispondente a quella del punto E vi è una regione, vicino alla zona in cui  $X=1$ , dove deve essere usata l'approssimazione QT.

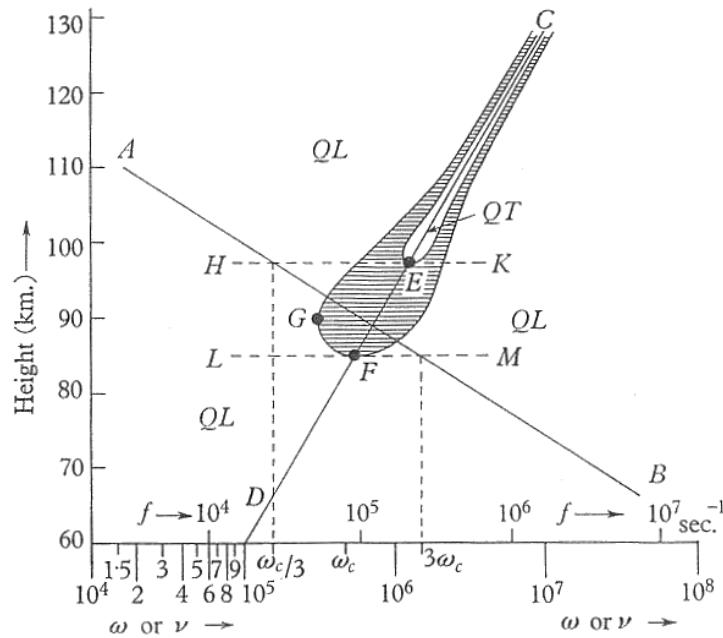


Figura 5.1

#### 5.4 Relazione tra l'espressione di $n$ in approssimazione QL e quella relativa al caso di assenza di campo magnetico

In assenza di un campo magnetico esterno l'espressione per l'indice di rifrazione è

$$(5.20) \quad n^2 = 1 - \frac{X}{(1 - iZ)},$$

mentre in approssimazione QL l'espressione dell'indice di rifrazione è

$$(5.21) \quad n_{QL}^2 = 1 - \frac{X}{(1 \pm |Y_L| - iZ)}.$$

Ora se si pone

$$(5.22) \quad X_{QL} = \frac{X}{(1 \pm |Y_L|)}, \quad \text{e} \quad Z_{QL} = \frac{Z}{(1 \pm |Y_L|)},$$

la (5.21) può essere posta nella forma

$$(5.23) \quad n_{QL}^2 = 1 - \frac{X_{QL}}{(1 - iZ_{QL})},$$

che è uguale alla (5.20). Si vedrà in seguito come questo fatto tornerà utile.

## 6. Effetto delle collisioni sulle curve per $\mu$ e $\chi$

Quando gli elettroni collidono con le particelle pesanti i valori dell'indice di rifrazione  $\mu$  vengono modificati e le onde subiscono un assorbimento il cui coefficiente dipende da  $\chi$ . Si vedrà adesso come le curve  $\mu(X)$  e  $\chi(X)$ , già studiate in assenza di collisioni, vengono modificate quando si considerano le collisioni (l'effetto delle collisioni sulla polarizzazione è già stato discusso nel capitolo 4). I calcoli verranno inizialmente fatti immaginando che non ci sia un campo magnetico esterno.

Nell'ultimo capitolo è stato mostrato che quando è valida l'approssimazione QL le espressioni per  $\mu$  e per  $\chi$  possono essere trasformate in quelle che si hanno in assenza di un campo magnetico esterno; le conclusioni che quindi si trarranno per il caso di assenza di campo magnetico esterno possono essere applicate al caso di approssimazione QL tenendo in considerazione le trasformazioni (5.22). Quando  $|Y_L|>1$  i valori di  $X_{QL}$  e  $Z_{QL}$  sono negativi; ora per quanto riguarda  $Z$  si vedrà che esso apparirà nelle espressioni solo come  $Z^2$  e quindi i valori negativi non avranno particolare significato, lo stesso discorso non si può invece fare per  $X$ .

Argomentazioni semplici non si possono fare per quanto riguarda le curve del caso generale e le curve relative all'approssimazione QT.

In assenza di un campo magnetico esterno si ha

$$(6.1) \quad (\mu - i\chi)^2 = 1 - \frac{X}{(1 - iZ)},$$

che può essere riscritta come

$$(6.2) \quad (\mu - i\chi)^2 = M - iN.$$

Dalla (6.2) segue che

$$(6.3) \quad \mu^2 = \frac{1}{2} \left\{ (M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}} + M \right\},$$

e

$$(6.4) \quad \chi^2 = \frac{1}{2} \left\{ (M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}} - M \right\}.$$

Paragonando la (6.1) con la (6.2) si ottengono le seguenti espressioni per  $M$  e  $N$

$$(6.5) \quad M = 1 - \frac{X}{(1 + Z^2)} = 1 - \zeta X$$

e

$$(6.6) \quad N = \frac{XZ}{(1 + Z^2)} = \zeta XZ,$$

dove

$$(6.7) \quad \zeta = \frac{1}{(1+Z^2)}.$$

Sostituendo la (6.5) e la (6.6) nella (6.3) e nella (6.4) si ha

$$(6.8) \quad \mu^2(X) = \frac{1}{2} \left\{ [1 + \zeta X(X-2)]^{\frac{1}{2}} + (1 - \zeta X) \right\}$$

e

$$(6.9) \quad \chi^2(X) = \frac{1}{2} \left\{ [1 + \zeta X(X-2)]^{\frac{1}{2}} - (1 - \zeta X) \right\}.$$

Dalle (6.8) e (6.9) si vede che  $Z$  appare solo tramite la relazione (6.7) e quindi sia  $\mu$  che  $\chi$  non dipendono dal segno di  $Z$ ; al variare di  $Z$  da 0 a  $+\infty$ ,  $\zeta$  varia da 1 a 0 come si può vedere dalla Figura 6.1.

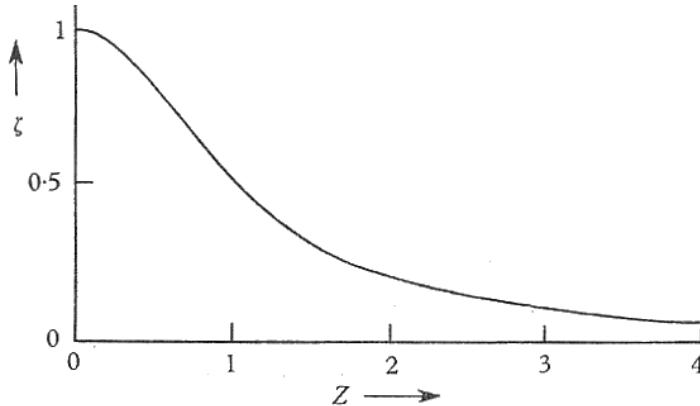


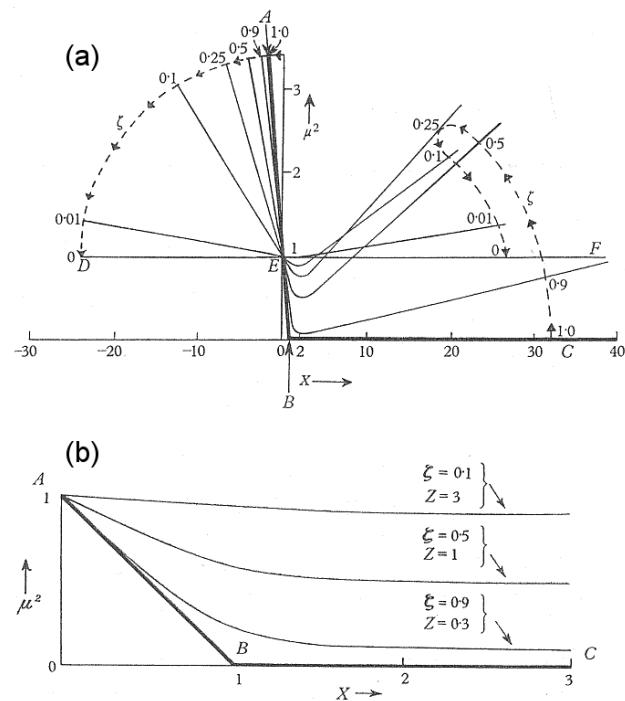
Figura 6.1

La Figura 6.2 mostra le curve per  $\mu^2(X)$ , per differenti valori di  $\zeta$ , calcolate tramite la (6.8) mentre la Figura 6.3 mostra le curve per  $\chi^2(X)$ , per differenti valori di  $\zeta$ , calcolate tramite la (6.9). Dalle Figure 6.2 e 6.3 si evince che:  $\mu^2$  ha un minimo per  $X=2$  che vale  $\mu^2(2)=1-\zeta$ ,  $\chi^2(2)=\zeta$ ,  $\mu^2(1)=1/2((1-\zeta)^{1/2}+(1-\zeta))$  e  $\chi^2(1)=1/2((1-\zeta)^{1/2}-(1-\zeta))$ .

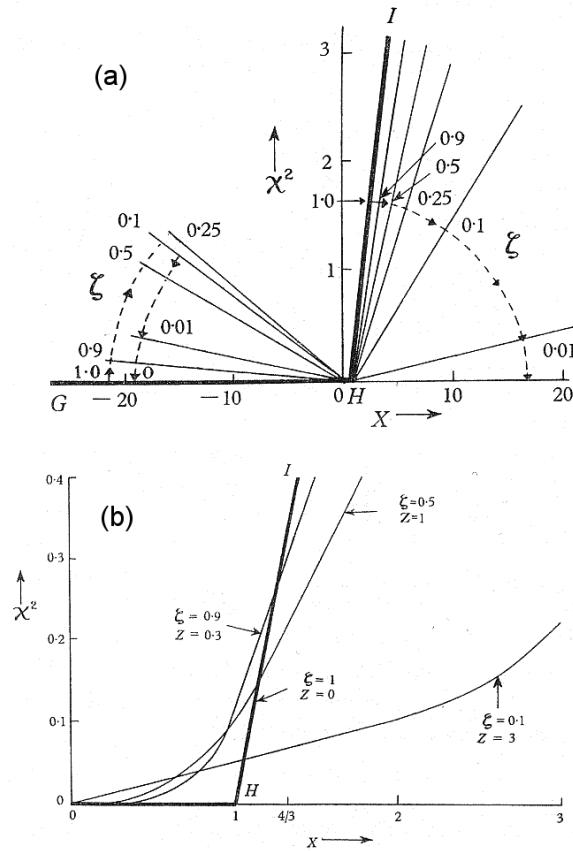
Nelle Figure 6.2 e 6.3 le linee tratteggiate con le frecce indicano come le differenti parti di curva si muovono al crescere di  $Z$  (quindi al decrescere di  $\zeta$ ) e si può notare che in alcune porzioni di piano le curve crescono o decrescono monotonicamente al decrescere di  $\zeta$ , ma in altre porzioni di piano tali curve passano attraverso un massimo (dipendente da  $\zeta$ ) al decrescere di  $\zeta$  (al crescere di  $Z$ ). Questo fatto merita di essere approfondito.

Differenziando la (6.8) e la (6.9), mantenendo costante  $X$ , si ottiene un massimo per un determinato valore di  $\zeta$ , indicato da  $\zeta_m$ , espresso dalla relazione

$$(6.10) \quad \zeta_m = \frac{(X-4)}{4(X-2)}.$$

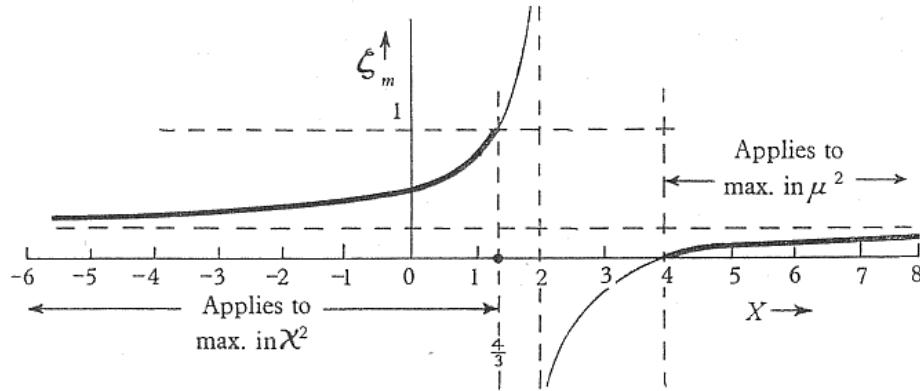


**Figura 6.2** Le curve per  $\mu^2(X)$ . In (b) il dettaglio di (a) vicino l'origine.



**Figura 6.3** Le curve per  $\chi^2(X)$ . In (b) il dettaglio di (a) vicino l'origine.

La relazione (6.10) è rappresentata in Figura 6.4. Dato che  $\zeta$  è compreso tra 0 e 1, la parte di curva della Figura 6.4 che interessa è quella con la linea più spessa; inoltre in Figura 6.4 per le  $X$  positive c'è scritto che si studia il massimo per  $\mu^2$  e questo è plausibile guardando la Figura 6.2 dove si vede che il massimo per  $\mu^2$  si ha in corrispondenza delle  $X$  positive, mentre per le  $X$  negative si studia il massimo per  $\chi^2$  e questo pure è plausibile guardando la Figura 6.3 dove si vede che il massimo per  $\chi^2$  si ha per valori negativi di  $X$ .



**Figura 6.4** I valori ( $\zeta_m$ ) di  $\zeta$ , al variare di  $X$ , che massimizzano  $\mu$  e  $\chi$ .

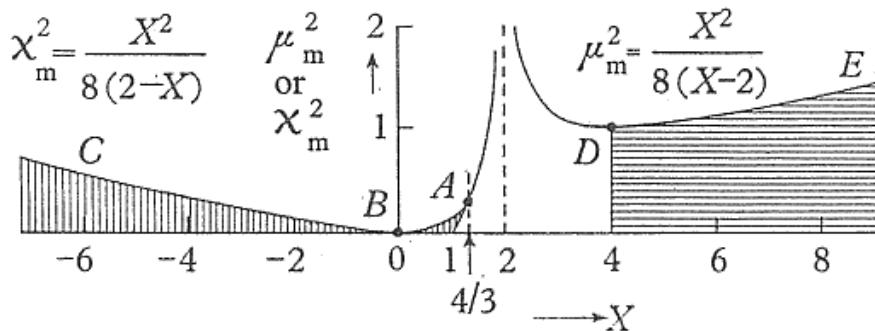
La sostituzione della (6.10) nella (6.9), nell'intervallo  $X < 4/3$ , mostra che il massimo valore  $\chi_m^2(X)$ , per qualsiasi valore di  $\zeta$ , è dato da

$$(6.11) \quad \chi_m^2(X) = \frac{X^2}{8(2-X)};$$

la (6.11) viene fuori perché sostituendo la (6.10) nella (6.9) sotto radice viene  $((X^2 - 4X + 4)/4)^{1/2}$  e, estraendo la radice, e considerando che  $X < 4/3$ , si prende  $(2-X)/2$  il che permette che  $\chi^2 > 0$ .

Allo stesso modo, facendo ragionamenti analoghi a quelli fatti per ottenere la (6.11), quando  $X > 4/3$  il massimo valore di  $\mu_m^2(X)$ , per qualsiasi valore di  $\zeta$ , è dato da

$$(6.12) \quad \mu_m^2(X) = \frac{X^2}{8(X-2)}.$$



**Figura 6.5**

Nella Figura 6.5 la (6.11) è rappresentata dalla curva ABC mentre la (6.12) dalla curva DE; le regioni ombreggiate sono quelle nelle quali il massimo di  $\mu^2(X)$  e  $\chi^2(X)$  varia, per  $X$  tenuto costante, e  $\zeta$  che varia tra 1 a 0. Dalla Figura 6.5 si deduce che  $\mu^2(X)$  e  $\chi^2(X)$  non vanno mai

sopra DE e ABC e, considerando anche la Figura 6.4, si vede che come  $\zeta$  decresce da 1 a 1/4 la curva  $\chi^2(X)$  parte da A passa per B e C per poi andare a  $-\infty$ , come  $\zeta$  decresce da 1/4 a 0 la curva  $\mu^2(X)$  si muove da  $+\infty$  fino a D.

Riassumendo, la curva  $\mu^2(X)$  ha un minimo per  $X=2$ , e quindi come funzione avrebbe solo un minimo; in realtà dipende da  $\zeta$  e questo fa sì che per valori positivi di  $X$  (con  $X$  fissato) si abbia un valore massimo di  $\mu^2(X)$  che dipende da un certo valore  $\zeta_m$ . La curva  $\chi^2(X)$  di per sé non ha né un massimo né un minimo ma, come  $\mu^2(X)$ , dipende da  $\zeta$  e questo fa sì che, fissato  $X$ , abbia un massimo in corrispondenza di un certo valore  $\zeta_m$ .

Si vuole mettere in evidenza ancora una volta che sebbene tutti i discorsi fatti e le figure viste finora si riferiscano al caso di assenza di campo magnetico esterno, questi sono validi, in virtù di quanto detto nel §5.4, anche nel caso di approssimazione QL.

### 6.1 Approssimazioni per piccoli valori di Z e condizioni di riflessione

In molti casi  $Z^2 \ll 1$  ed è quindi interessante vedere che forma assumono la (6.8) e la (6.9) sotto questa condizione. Se  $Z^2 \ll 1$  (si suppone  $Z < 1/3$ ) allora  $\zeta \approx 1 - Z^2$  e la (6.8) e la (6.9), escludendo la zona vicino  $X=1$ , assumono le seguenti espressioni

$$(6.13) \quad X > 1 \quad \mu^2 = \frac{1}{4} \frac{Z^2 X^2}{(X-1)},$$

$$(6.14) \quad X < 1 \quad \mu^2 = (1-X) + \frac{1}{4} \frac{X Z^2 (4-3X)}{(1-X)},$$

$$(6.15) \quad X > 1 \quad \chi^2 = (X-1) + \frac{1}{4} \frac{X Z^2 (4-3X)}{(X-1)},$$

$$(6.16) \quad X < 1 \quad \chi^2 = \frac{1}{4} \frac{Z^2 X^2}{(1-X)}.$$

Le equazioni (6.13)-(6.16) mostrano che  $\mu^2(X)$  e  $\chi^2(X)$ , eccetto che nella zona vicino  $X=1$ , possono essere espresse nella forma

$$(6.17) \quad \mu^2(X, Z) = \mu^2(X, 0) + Z^2 F(X)$$

e

$$(6.18) \quad \chi^2(X, Z) = \chi^2(X, 0) + Z^2 G(X).$$

In Figura 6.6 sono mostrate le funzioni  $F(X)$  e  $G(X)$ .

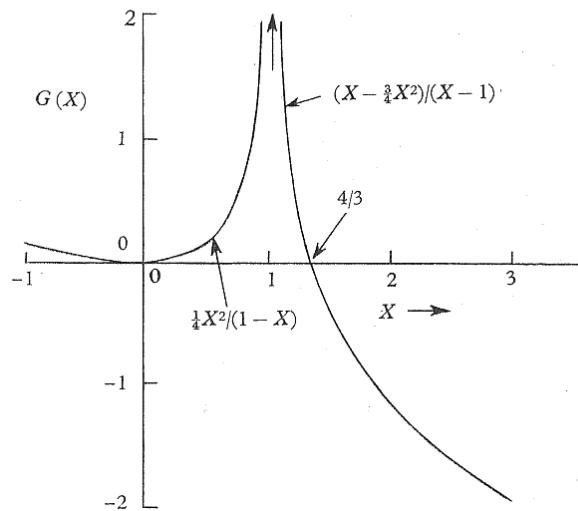
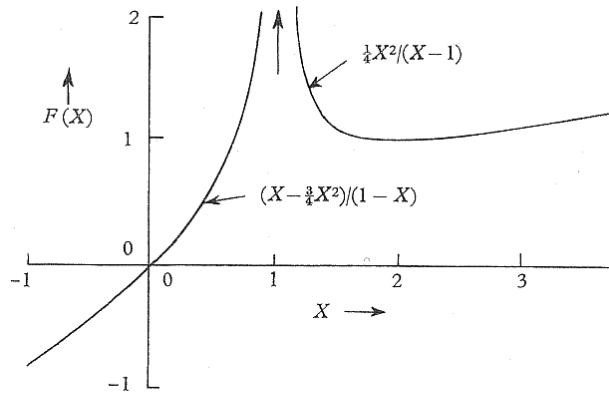


Figura 6.6

Si vede che  $F(X)$ , e quindi  $\mu^2$ , ha un minimo in  $X=2$  in conformità con quanto trovato prima. Si vede anche che  $G(X)$  cambia segno quando  $X=4/3$  in conformità con la richiesta che la curva  $\chi^2(X)$  deve stare sopra il valore  $\chi^2(0)$  per  $X < 4/3$  e sotto il valore  $\chi^2(0)$  per  $X > 4/3$  (vedi Figura 6.3.b). Avendo visto che  $\mu^2(2)=1-\zeta$  e  $\chi^2(2)=\zeta$ , per  $Z^2 \ll 1$  ( $\zeta \approx 1-Z^2$ ), si ha  $\mu^2(2)=Z^2$  e  $\chi^2(2)=1-Z^2$ . Analogamente avendo trovato che  $\mu^2(1)=1/2((1-\zeta)^{1/2}+(1-\zeta))$  e  $\chi^2(1)=1/2((1-\zeta)^{1/2}-(1-\zeta))$  si ha, per  $Z^2 \ll 1$  ( $\zeta \approx 1-Z^2$ ),  $\mu^2(1)=\chi^2(1)=(1/2)Z$ . I valori di  $\mu$  e  $\chi$  appena trovati per  $X=1$  sono molto importanti perché frequentemente accade che un possibile livello di riflessione per onde incidenti verticalmente sia situato vicino la zona in cui  $X=1$ . Se, in corrispondenza di questo livello, sia  $\mu$  che  $\chi$  sono sufficientemente piccoli, è stato mostrato che un'apprezzabile riflessione può avvenire. Se per esempio  $Z=0.1$  allora

$$(6.19) \quad \mu(1, Z) = \chi(1, Z) \approx 0.2.$$

Risulta utile notare che, per  $Z^2 \ll 1$ ,  $\mu^2(1)$  e  $\chi^2(1)$  sono proporzionali a  $Z$  mentre, per  $X \neq 1$ , le parti di  $\mu^2$  e  $\chi^2$  delle (6.17) e (6.18) che rappresentano lo scostamento rispetto al caso senza collisioni sono proporzionali a  $Z^2$ .

## 6.2 Condizione di riflessione dove $X=1$ quando $Z^2 \gg 1$

Se non ci fossero collisioni e non ci fosse un campo magnetico esterno, un'onda che viaggia verticalmente nella ionosfera sarebbe riflessa ad una quota dove  $X=1$ ; in questo paragrafo si vedrà cosa succede, ad una quota dove  $X=1$ , quando non c'è un campo magnetico esterno ma le collisioni sono così numerose che  $Z^2 \gg 1$ .

Le equazioni (6.8) e (6.9) se  $Z^2 \gg 1$  diventano:

$$(6.20) \quad \begin{cases} \mu^2 \\ \chi^2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{X(X-2)}{Z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \pm \left( 1 - \frac{X}{Z^2} \right) \right\}.$$

Vicino  $X=1$  valgono le disuguaglianze  $Z^2 \gg X$  e  $Z^2 \gg X^2$  e le (6.20) diventano

$$(6.21) \quad \begin{cases} \mu^2 \\ \chi^2 \end{cases} \approx 1 + \frac{\left( \frac{1}{4} X^2 - X \right)}{Z^2}$$

e

$$(6.22) \quad \chi^2 \approx \frac{1}{4} \frac{X^2}{Z^2},$$

quindi  $\mu$  è quasi uguale a 1 e  $\chi$  è piccolo; ne segue quindi che alla quota dove  $X=1$  non c'è riflessione e l'onda si propaga verso altezze maggiori. All'aumentare della quota la densità elettronica (proporzionale a  $X$ ) aumenta e la frequenza di collisione (proporzionale a  $Z$ ) diminuisce e quindi il rapporto  $X/Z$  cresce fino ad una quota dove  $X=Z$ . Supponendo che in corrispondenza della quota dove  $X=Z$  sia  $X=3$ , in modo che  $Z^2=X^2 \gg 1$ , la (6.20) risulta essere ancora valida e dà

$$(6.23) \quad \begin{cases} \mu^2 \\ \chi^2 \end{cases} \approx \frac{1}{2} \left\{ (1+1)^{\frac{1}{2}} \pm 1 \right\},$$

da cui

$$(6.23.a) \quad \mu \left( \frac{X}{Z} = 1 \right) \approx 1$$

e

$$(6.23.b) \quad \chi \left( \frac{X}{Z} = 1 \right) \approx 0.45;$$

adesso quindi  $\chi$  ha assunto un valore apprezzabile, ma  $\mu$  è ancora prossimo a 1. Per stimare la distanza sulla quale  $\chi$  è cambiato dal piccolo valore della (6.22) al valore apprezzabile della (6.23.b) si inserisce un valore di  $X/Z=0.3$  nella (6.20) e si ha

$$(6.24.a) \quad \mu\left(\frac{X}{Z} = 0.3\right) \approx 1,$$

$$(6.24.b) \quad \chi\left(\frac{X}{Z} = 0.3\right) \approx 0.16.$$

Dalle (6.23) e (6.24) si vede quindi che quando  $X/Z$  cresce da 0.3 a 1,  $\mu$  non cambia molto ma  $\chi$  cambia da 0.16 a 0.45. È stato mostrato che se  $\mu$  o  $\chi$  cambiano di una frazione apprezzabile del loro valore, in una distanza che è comparabile con la lunghezza d'onda, allora un'apprezzabile riflessione può avvenire; si può quindi concludere che sotto queste condizioni un'apprezzabile riflessione può avvenire alla quota dove  $X=Z$  (e quindi in corrispondenza di un valore di  $X>1$ ).

### 6.3 Risultati per l'approssimazione QL

È interessante adesso esaminare la forma delle curve  $\mu^2(X)$  e  $\chi^2(X)$  per una serie di differenti valori della frequenza di collisione  $v$  quando è valida l'approssimazione QL. Per primo viene considerato il caso in cui  $|Y_L|<1$  in modo che  $X'_{QL}$  espresso dalla (5.22) sia positivo per entrambi i segni dell'equazione. Le curve per  $\mu^2(X)$  e  $\chi^2(X)$  sono quindi quelle delle Figure 6.2 e 6.3 corrispondenti alle  $X$  positive; l'unica cosa a cui bisogna porre attenzione è che in questo caso la scala delle  $X$  deve essere modificata in modo tale che l'ascissa  $X=1$  corrisponda a  $X=(1\pm|Y_L|)$  (al solito perché in condizione di propagazione longitudinale le condizioni di riflessione si hanno per  $X=(1\pm Y)$ ). Esaminiamo adesso cosa accade quando  $v$  va da zero a valori più grandi; le quantità  $\zeta_{QL}$  date da

$$(6.25) \quad \zeta_{QL} = \frac{1}{1 + v^2 / (\omega \pm \omega|Y_L|)^2}$$

decrescono da 1 a 0, ma differentemente per i due segni. Quando  $v=0$  ( $\zeta=1$ )  $\mu$  è rappresentato dalla curva ABC di Figura 6.2; come  $v$  cresce ( $\zeta$  decresce) le curve di  $\mu$  variano così come rappresentato dalle frecce in Figura 6.2, per valori di  $X<4/3(1\pm|Y_L|)$  i valori di  $\mu$  crescono costantemente mentre per valori di  $X>4/3(1\pm|Y_L|)$  i valori di  $\mu$  inizialmente crescono e poi decrescono. Quando  $v=0$  ( $\zeta=1$ )  $\chi$  è rappresentato dalla curva OHI di Figura 6.3 e come  $v$  cresce le curve di  $\chi$  variano così come rappresentato dalle frecce in Figura 6.3.

Si considera adesso il caso in cui  $|Y_L|>1$ . In questo caso il comportamento del segno superiore è simile a quello del caso  $|Y_L|<1$ , ma per il segno inferiore  $X'_{QL}=X/(1-|Y_L|)$  è ora negativo cosicché le curve per  $\mu^2(X)$  e  $\chi^2(X)$  sono quindi quelle delle Figure 6.2 e 6.3 corrispondenti alle  $X$  negative. Dalla Figura 6.2 si vede che  $\mu$  è più grande di 1 per tutti i valori di  $X$ . Quando  $v=0$ ,  $\chi$  vale zero per tutti i valori di  $X$ ; quando  $v$  cresce, i valori di  $\chi$  inizialmente crescono e poi decrescono. Alla fine del §6.1 si è visto che se  $Z=0.1$  allora  $\mu(1)=\chi(1)\approx 0.2$ ; adesso, considerando che in approssimazione QL (vedi §5.4)  $Z_{QL}=Z/(1\pm|Y_L|)$  e  $X'_{QL}=X/(1\pm|Y_L|)$ , si ha che se  $Z<0.1(1\pm|Y_L|)$  allora  $\mu(1\pm Y_L)=\chi(1\pm Y_L)<0.2$ . Ragionando come fatto all'inizio del capitolo si ottiene che adesso il minimo valore di  $\mu^2$  si ottiene per  $X=2(1\pm|Y_L|)$  ed è pari a  $\mu^2=1-[1+Z^2/(1\pm|Y_L|)^2]^{-1}$ .

Si vuole concludere questo paragrafo dicendo che i risultati ottenuti nel §6.2 possono essere estesi anche al caso in cui è presente un campo magnetico esterno ed è valida l'approssimazione QL. Considerando al solito le sostituzioni del §5.4 ( $X'$  per  $X$  e  $Z'$  per  $Z$ ), se  $Z'^2\gg 1$  allora in corrispondenza dell'altezza dove  $X'=1$  non ci sarà riflessione ma, se all'aumentare della quota  $Z'$  decresce e  $X'$  cresce, allora un'apprezzabile riflessione può avvenire alla quota dove  $X'=Z'$ .

#### 6.4 Approssimazione QT dove X=1, segno superiore

In assenza di collisioni, in approssimazione QT, l'indice di rifrazione per l'onda ordinaria (segno superiore) diventa nullo quando  $X=1$  e l'onda viene quindi riflessa alla corrispondente altezza. Se siamo in presenza di collisioni e la frequenza di collisione è sufficientemente piccola l'approssimazione QT continua ad essere valida e l'indice di rifrazione può diventare piccolo. Se si riprende la (5.5) che esprime l'indice di rifrazione in approssimazione QT per il segno superiore

$$(6.26) \quad n_{QT(u)}^2 = 1 - \frac{X}{[1 - iZ + (1 - X - iZ)\cot^2 \vartheta]},$$

questa, quando  $X=1$ , diventa

$$(6.27) \quad n_{QT(u)}^2 = 1 - \frac{1}{(1 - iZ \operatorname{cosec}^2 \vartheta)}.$$

Se  $Z \operatorname{cosec}^2 \vartheta < 1$  (che corrisponde a  $Z < 0.1 \sin^2 \theta$ ), e ragionando come fatto alla fine del §6.1, segue che

$$(6.28) \quad \mu^2(1)_{QT(u)} \cong \chi^2(1)_{QT(u)} \cong \frac{1}{2} Z \operatorname{cosec}^2 \vartheta \Rightarrow \mu^2(1)_{QT(u)} \cong \chi^2(1)_{QT(u)} < 0.2.$$

#### 6.5 Considerazioni finali

Un'onda incidente verticalmente nella ionosfera viene riflessa ad un'altezza in corrispondenza della quale  $\mu=0$ , a patto che  $\chi$  non sia troppo grande in corrispondenza della stessa altezza e sotto di essa. Nel capitolo 3 si è visto che, quando  $v=0$ , i soli valori di  $X$  che annullano  $\mu$  e  $\chi$  sono uno o più dei valori  $X=1-Y$ , 1, o  $1+Y$ , e la riflessione avviene in corrispondenza delle relative altezze. Quando gli elettroni collidono con le particelle pesanti il valore di  $\mu$  non va mai a zero, ma è stato mostrato che un'apprezzabile riflessione può avvenire in corrispondenza di quelle altezze rispetto alle quali  $\mu$  decresce rapidamente verso un valore piccolo, a patto che  $\chi$  non sia troppo grande. Se  $v$  è abbastanza piccola questa decrescita repentina di  $\mu$  avverrà proprio nelle vicinanze di una o più altezze dove  $X=1-Y$ , 1, o  $1+Y$ .

Si vuole concludere il capitolo riassumendo alcune regole di carattere generale:

(a) dove  $X=1$ :

1) l'approssimazione QL è valida se

$$(6.29) \quad v > 3|\omega_c|,$$

e di conseguenza il valore di  $\mu$  non può essere piccolo (si tengano presenti le considerazioni fatte nel §6.3).

2) L'approssimazione QT è valida se

$$(6.30) \quad v < \frac{1}{3}|\omega_c|,$$

e di conseguenza il valore di  $\mu$  può essere piccolo a patto che il valore di  $\nu$  sia piccolo. Facendo gli opportuni calcoli si trova che  $\mu(1)$  e  $\chi(1)$  sono abbastanza piccoli ( $<0.2$ ) nel momento in cui

$$(6.31) \quad Z < 0.1 \sin^2 \vartheta.$$

(b) dove  $X=1 \pm Y_L$ :

- 1) l'approssimazione QL è valida a patto che  $\theta < 40^\circ$ .
- 2) Facendo gli opportuni calcoli si trova che  $\mu(1 \pm Y_L)$  e  $\chi(1 \pm Y_L)$  sono abbastanza piccoli ( $<0.2$ ) nel momento in cui

$$(6.32) \quad Z < 0.1(|1 \pm Y_L|)$$

condizione che, con  $\theta < 40^\circ$ , può essere approssimata a

$$(6.33) \quad Z < 0.1(|1 \pm Y|).$$

## 7. Velocità di gruppo

Considerata un'onda del tipo  $\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{E}\exp(-ikz)\exp(i\omega t)$ , la sua velocità di gruppo è usualmente espressa nella forma

$$(7.1) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk};$$

considerando che la velocità di fase è  $v_f = \omega/k$  risulta valida la seguente espressione per l'indice di rifrazione di gruppo

$$(7.2) \quad \mu' = \frac{c}{v_g} = c \frac{dk}{d\omega} = c \frac{d(\omega/v_f)}{d\omega} = \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} = \mu + \omega \frac{d\mu}{d\omega}.$$

### 7.1 Assenza di un campo magnetico esterno

In assenza di un campo magnetico esterno e trascurando le collisioni degli elettroni con le particelle pesanti l'espressione di  $\mu$  è:

$$(7.3) \quad \mu^2 = 1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2},$$

e dalla (7.2) segue che

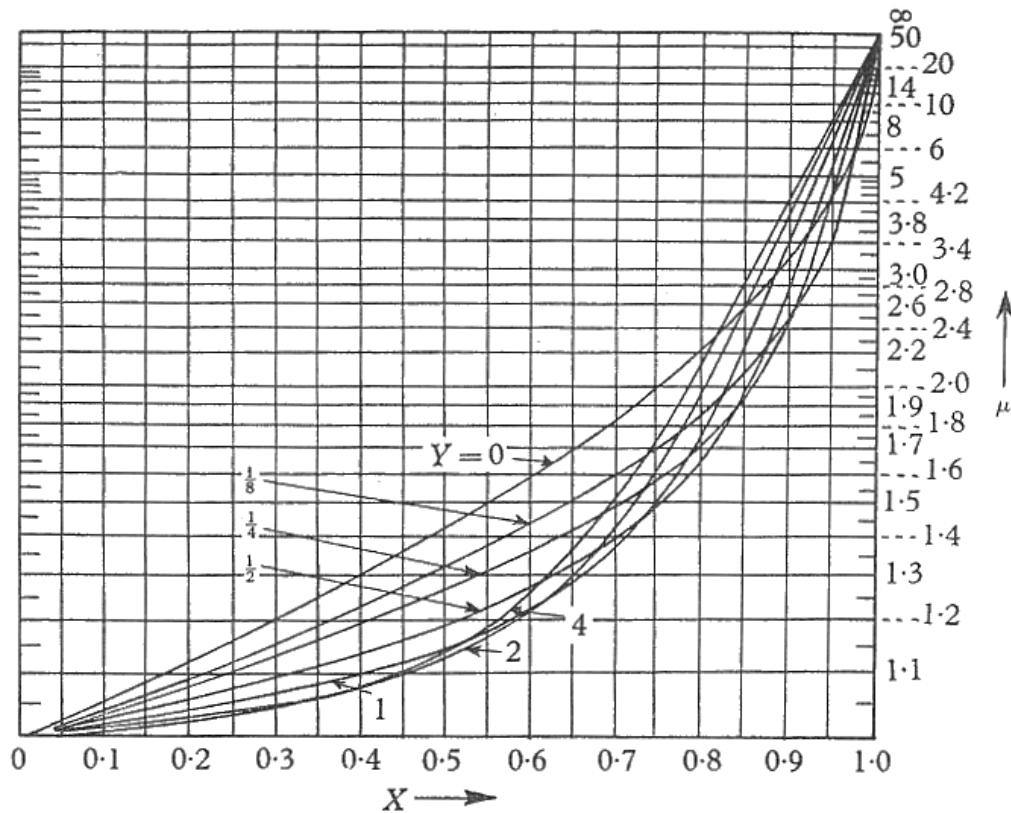
$$(7.4) \quad \mu\mu' = 1.$$

Questo semplice risultato porta ad interessanti ed utili relazioni. La sua applicazione è comunque ristretta a quei casi dove la (7.3) è approssimativamente vera, il che implica che  $\omega^2 > \omega_H^2$ , condizione questa che è raramente soddisfatta nella ionosfera terrestre.

### 7.2 Presenza di un campo magnetico esterno

Quando l'indice di rifrazione (di fase) è rappresentato dall'equazione completa (1.49) l'espressione per l'indice di rifrazione di gruppo è piuttosto complicata. Tale espressione è stata valutata per alcuni casi speciali assumendo che le collisioni siano assenti. A riguardo, l'articolo più completo è quello di Shinn e Whale (1952, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics) che illustra una serie di curve che mostrano  $\mu'(X)$  per una serie di differenti valori di  $Y = \omega_H/\omega$  quando l'onda forma un angolo di  $23^\circ 16'$  con il campo magnetico esterno (cosa che succede ad esempio nel sud-est dell'Inghilterra per una propagazione verticale).

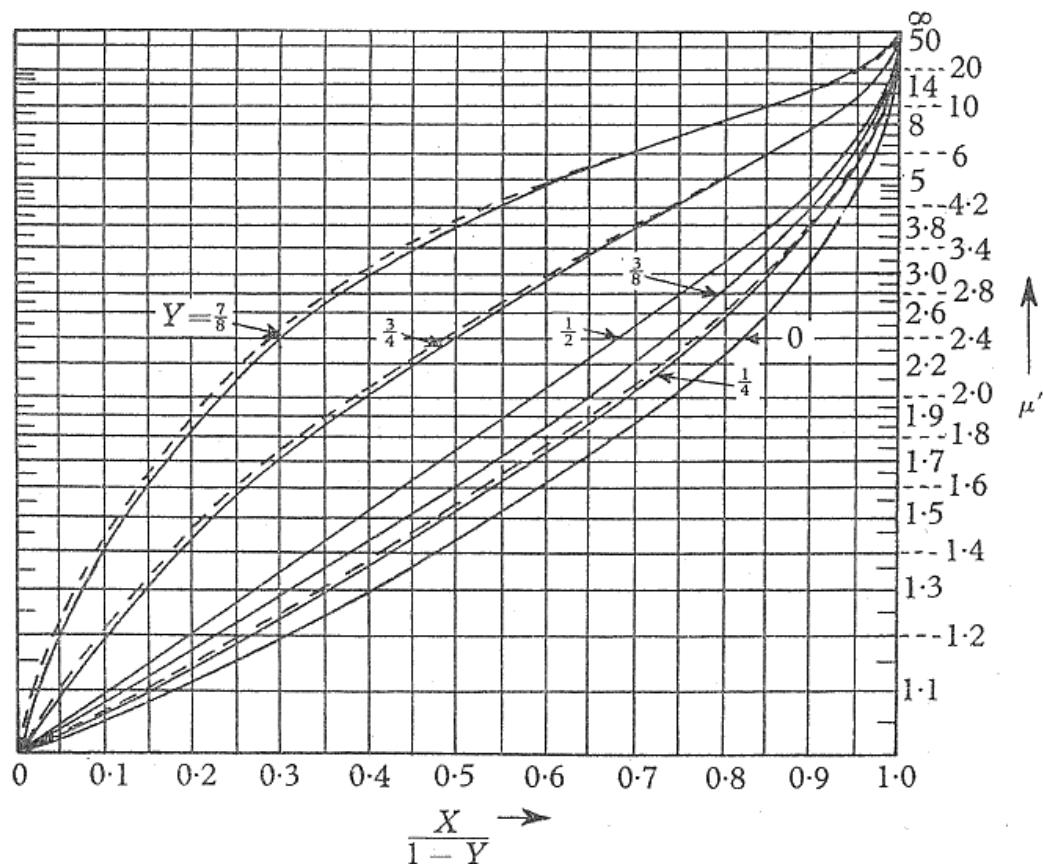
Le curve per l'onda ordinaria sono mostrate in Figura 7.1; la curva per  $Y=0$  corrisponde al caso di assenza di campo magnetico esterno ed è rappresentata dall'equazione  $\mu' = (1-X)^{-1/2}$ .



**Figura 7.1** Curve che illustrano come varia, per il raggio ordinario, l'indice di rifrazione di gruppo  $\mu'$  in funzione di  $X$ , per differenti valori di  $Y$  e per una direzione di propagazione che forma un angolo di  $23^{\circ}16'$  con il campo magnetico esterno.

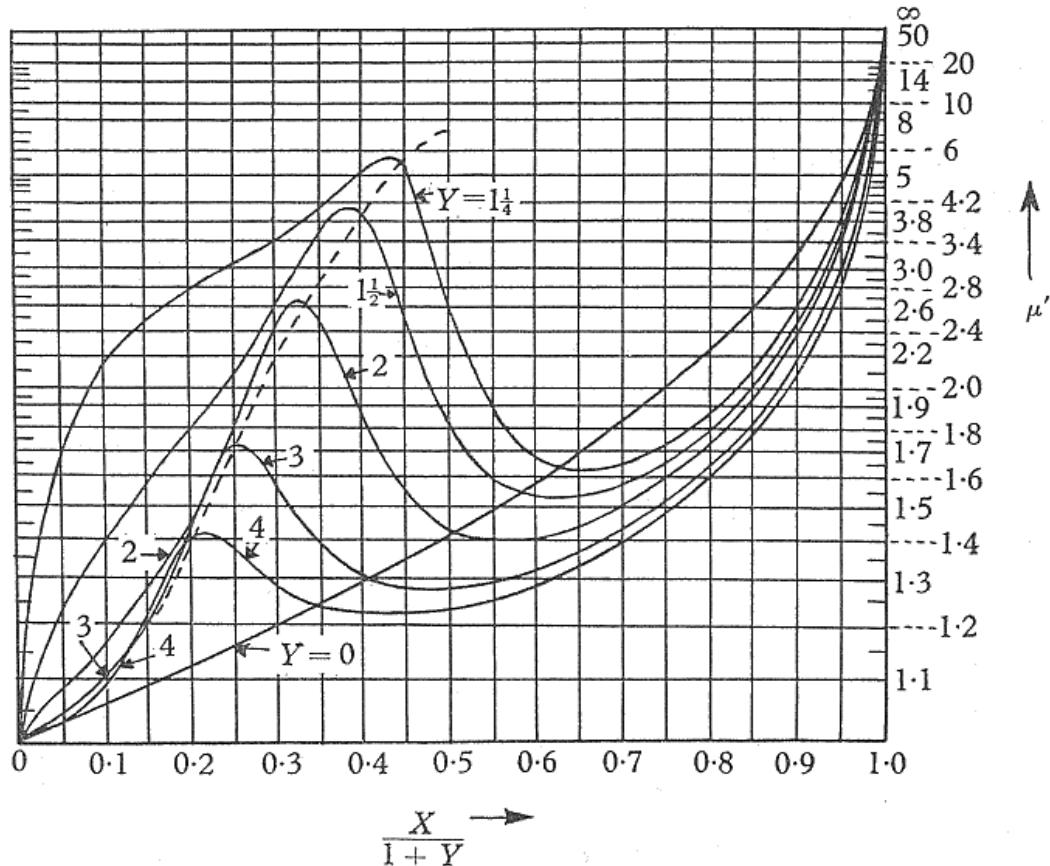
Quando si è in presenza di un campo magnetico esterno tale curva è appropriata per una frequenza infinita dell'onda. Per frequenze più basse le curve corrispondenti a valori più grandi di  $Y$  sono le più appropriate e si vede che per piccoli valori di  $X$  il valore di  $\mu'$  è sempre sotto quello per  $Y=0$ , ma appena  $X$  si avvicina all'unità il valore di  $\mu'$  supera quello per  $Y=0$ . Ne segue quindi che un'onda ordinaria che viaggia in ionosfera verso il livello  $X=1$  dove (o nelle vicinanze del quale) verrà riflessa, in un primo momento viaggia più velocemente e poi più lentamente rispetto al caso di assenza di campo magnetico esterno. Il risultante ritardo di gruppo sarà quindi più grande o più piccolo, rispetto a quello che si ha per  $Y=0$ , in accordo con la distribuzione di  $X$  (quindi della densità elettronica) con l'altezza.

Le curve per l'onda straordinaria prendono una forma differente a seconda che  $Y < 1$  o  $Y > 1$ . Quando  $Y < 1$  il livello di riflessione è raggiunto per  $X = 1 - Y$  e quindi è conveniente graficare  $\mu'$  come funzione di  $X/(1-Y)$  per differenti valori di  $Y$ . Dalla Figura 7.2 si può vedere che le curve giacciono tutte sopra quella corrispondente  $Y=0$ , così che il ritardo di gruppo è sempre più grande di quello che verrebbe calcolato in assenza di campo magnetico. Le curve tratteggiate sono disegnate per  $\theta=0$  (approssimazione QL) e si può vedere che sono molto vicine a quelle corrispondenti a  $\theta=23^{\circ}16'$ . Per l'onda ordinaria l'approssimazione QL non può essere usata in quanto in tal caso la riflessione sarebbe avvenuta per  $X=1+Y$  e non per  $X=1$ .



**Figura 7.2** Curve che illustrano come varia, per il raggio straordinario, l'indice di rifrazione di gruppo  $\mu'$  in funzione di  $X/(1-Y)$ , per differenti valori di  $Y < 1$ .

Quando  $Y > 1$  la componente straordinaria viene riflessa ad una quota dove  $X = 1 + Y$  e quindi è conveniente graficare le curve come funzione di  $X/(1+Y)$ . Dalla Figura 7.3 si vede che tali curve hanno un massimo per  $X < (1+Y)$  e che  $\mu'$  va sotto la curva corrispondente a  $Y=0$  come  $X$  si avvicina a  $1+Y$ . La linea tratteggiata interseca le differenti curve nei punti dove  $X=1$  e si vede come essa sia molto vicina ai massimi delle varie curve.



**Figura 7.3** Curve che illustrano come varia, per il raggio straordinario, l'indice di rifrazione di gruppo  $\mu'$  in funzione di  $X/(1+Y)$ , per differenti valori di  $Y > 1$ . I massimi delle curve giacciono vicino la linea tratteggiata che rappresenta i valori di  $\mu'(X=1)$ .

NOTA: Considerazioni di getto sulle condizioni di riflessione.

La riflessione per  $X=1$  significa

$$\frac{\omega_N^2}{\omega^2} = 1 \Rightarrow \omega_{\max_1}^2 = \omega_{N_{\max}}^2 ;$$

la riflessione per  $X=1-Y$  significa che

$$\frac{\omega_N^2}{\omega^2} = 1 - Y \Rightarrow \omega_{\max_2}^2 = \frac{\omega_{N_{\max}}^2}{1 - Y} .$$

Ora, se  $Y < 1$  (se  $Y > 1$  la relazione perderebbe di significato in quanto si otterrebbero delle frequenze negative) allora  $\omega_{\max_2} > \omega_{\max_1}$  e questo vuol dire che la frequenza critica di riflessione dell'onda straordinaria è maggiore della corrispondente frequenza critica di riflessione dell'onda ordinaria. In altre parole a parità di altezza l'onda straordinaria viene riflessa ad una frequenza maggiore rispetto all'onda ordinaria (e a pag. 31 si è visto che  $\omega_s - \omega_o \approx \omega_H/2$ ). Mentre invece a parità di frequenza l'onda straordinaria si riflette ad una quota inferiore rispetto quella alla quale si riflette l'onda ordinaria; infatti l'onda ordinaria si riflette per  $X=1$ , che corrisponde alla condizione  $\omega_N^2 = \omega^2$ , mentre l'onda straordinaria si riflette per

$X=1-Y$ , che corrisponde alla condizione  $\omega_N^2=\omega^2-\omega\omega_H$ , e questo significa che l'onda straordinaria si riflette in corrispondenza di una frequenza di plasma più piccola o meglio ad una quota più bassa.

La riflessione per  $X=1+Y$  significa che

$$\frac{\omega_N^2}{\omega^2} = 1+Y \Rightarrow \omega_{\max_2}^2 = \frac{\omega_{N_{\max}}^2}{1+Y},$$

e sia che  $Y<1$ , sia che  $Y>1$ , allora  $\omega_{\max_2}<\omega_{\max_1}$  e questo vuol dire che la frequenza critica di riflessione dell'onda straordinaria è minore della corrispondente frequenza critica di riflessione dell'onda ordinaria. In altre parole a parità di altezza l'onda straordinaria viene riflessa ad una frequenza minore rispetto all'onda ordinaria (e a pag. 31 si è visto che  $\omega_o-\omega_s \approx \omega_H/2$ ). Mentre invece a parità di frequenza l'onda straordinaria si riflette ad una quota superiore rispetto quella alla quale si riflette l'onda ordinaria; infatti l'onda ordinaria si riflette per  $X=1$ , che corrisponde alla condizione  $\omega_N^2=\omega^2$ , mentre l'onda straordinaria si riflette per  $X=1+Y$ , che corrisponde alla condizione  $\omega_N^2=\omega^2+\omega\omega_H$ , e questo significa che l'onda straordinaria si riflette in corrispondenza di una frequenza di plasma più grande o meglio ad una quota più alta.

---

## 8. Applicazioni alla ionosfera terrestre: un modello di ionosfera senza campo magnetico

Nei discorsi che seguono saranno considerati due differenti modelli di ionosfera. In entrambi verrà supposto che la densità elettronica sia stratificata orizzontalmente. Quando sarà discussa la penetrazione di uno strato sarà supposto che la densità elettronica cresca proporzionalmente con l'altezza fino al raggiungimento di un massimo sopra il quale decresce. Questo tipo di strato è illustrato in Figura 8.1.

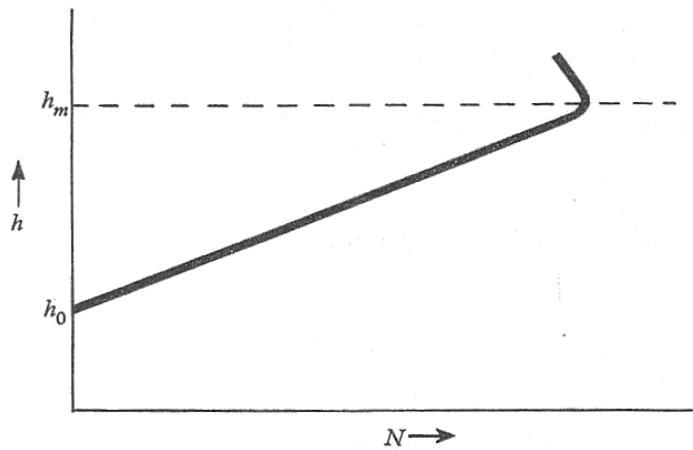


Figura 8.1

Quando l'attenzione verrà posta a quelle onde che sono riflesse nella parte bassa di uno strato, non vicina al massimo di densità, verrà usato un modello differente le cui proprietà sono rappresentate in Figura 8.2.

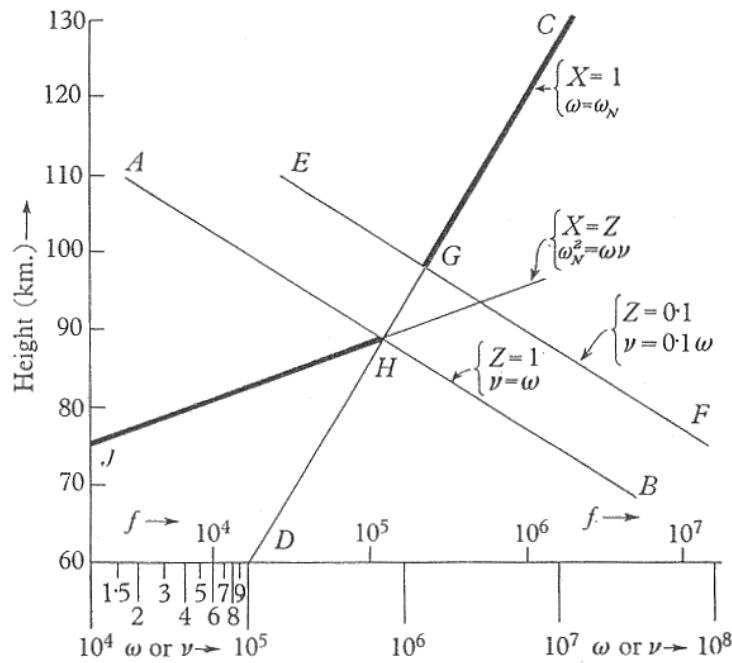


Figura 8.2

La densità elettronica cresce esponenzialmente verso l'alto, come indicato dalla linea CD che rappresenta l'andamento della frequenza angolare di plasma  $\omega_N$  in funzione dell'altezza. Viene supposto che  $N$  vari con l'altezza nel modo  $N=N_0\exp(h/H)$  dove  $H=8\text{km}$  così che  $\omega_N$  è proporzionale a  $\exp(h/2H)$ . Il modo in cui la frequenza di collisione decresce con l'altezza è rappresentato dalle linee AB ed EF. Sebbene questo modello è stato costruito per avere una qualche somiglianza con la parte bassa dello strato E deve essere inteso solo come illustrativo e non deve essere considerato come realmente rappresentante la struttura di tale strato.

Quando si prende in considerazione un campo magnetico esterno il comportamento è piuttosto complicato ma al momento siamo unicamente interessati a vedere quello che succede in assenza di un campo magnetico esterno.

### 8.1 Frequenza di penetrazione

In assenza di un campo magnetico esterno e trascurando le collisioni tra gli elettroni e le particelle pesanti, un'onda incidente verticalmente verrebbe riflessa ad una quota dove  $\mu=0$  (è stato detto infatti che quando gli elettroni collidono con le particelle pesanti il valore di  $\mu$  non va mai zero), condizione che si ottiene quando  $X=1$  ossia quando la frequenza di trasmissione uguaglia la frequenza di plasma

$$(8.1) \quad f_N = 9\sqrt{N} ;$$

quindi se il massimo valore di  $N$  dello strato è  $N_m$  la frequenza più alta che può essere riflessa dallo strato si ottiene sostituendo  $N_m$  nella (8.1). Questa frequenza è detta *frequenza critica* o *frequenza di penetrazione dello strato*.

### 8.2 Altezza di riflessione

Non trascurando le collisioni l'indice di rifrazione non diventa mai zero; come già visto nel capitolo 6 a pag. 50 il suo valore minimo si raggiunge per  $X=2$  ed è uguale a  $1-1/(1+Z^2)$ . Per studiare le condizioni di riflessione è quindi richiesto uno studio più approfondito. Uno studio semplificato mostra che la riflessione avviene con apprezzabile probabilità ad una quota alla quale  $(\lambda_0/\mu^2)(d\mu/dh) \gg 1$ , dove  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda nel vuoto e  $h$  è la quota (reale). Ora, se vicino la quota dove  $X=1$  si ha  $Z^2 \ll 1$ , è stato mostrato (§6.1, pag. 54) che  $\mu^2(1) \approx (1/2)Z$  ed è quindi piccolo; inoltre  $d\mu/dX$  ha un valore finito così che, a meno che la densità elettronica vari molto lentamente con la quota, la quantità  $(\lambda_0/\mu^2)(d\mu/dh)$  è grande. Quindi, anche in presenza di collisioni, si avrà una considerabile riflessione alla quota in corrispondenza della quale si ha  $X=1$ , a patto che

- $\lambda_0$  non sia troppo piccola,
- il valore di  $Z$  non sia troppo grande ( $Z < 0.1$ ),
- il gradiente di densità elettronica non sia troppo piccolo.

Quindi a patto che  $Z < 0.1$  la riflessione avviene in corrispondenza della quota alla quale  $X=1$ . Nella Figura 8.2 i punti della linea CD rappresentano le varie altezze alle quali, in corrispondenza di diversi valori della frequenza di trasmissione, si raggiunge la condizione  $X=1$ , e CG è la parte di questa linea che corrisponde alla condizione  $Z < 0.1$  (quindi le altezze rappresentate dalla linea CD sono quelle in corrispondenza delle quali si avrà effettivamente una riflessione). Per frequenze minori di quella corrispondente al punto G la condizione  $Z^2 \ll 1$  non è più verificata e quindi la riflessione per  $X=1$  non può più avvenire (come già visto nel §6.2, pag. 55-56, in queste condizioni  $\mu \approx 1$  e  $\chi \approx 0$ ). L'onda quindi viaggia verso l'alto, senza essere riflessa e senza essere assorbita (attenzione al fatto che questo è vero in prossimità della quota dove  $X=1$ ; in realtà l'onda potrebbe aver subito un assorbimento

pronunciato già prima di arrivare a questa quota), fino a quote dove  $d\mu/dh$  o  $d\chi/dh$  diventano grandi e questo, come visto in precedenza (§6.2, pag. 56), accade in corrispondenza delle quote dove  $X=Z$ ; quindi, se  $\lambda_0$  è grande abbastanza, una riflessione avviene vicino queste quote individuate dalla linea HJ in Figura 8.2.

Se, in corrispondenza della quota dove  $X=Z$ , i gradienti non sono troppo elevati e se  $\lambda_0$  non è troppo grande solo una piccola parte dell'onda subisce una riflessione mentre la parte principale continua a viaggiare verso l'alto.

### 8.3 Altezza equivalente di riflessione

Ad alte frequenze le onde sono normalmente riflesse in prossimità dell'altezza reale  $h_1$  dove  $X=1$ . Se un impulso elettromagnetico viene trasmesso nella ionosfera ritornerà da questa altezza  $h_1$  dopo un intervallo di tempo che dipende dal valore della sua velocità di gruppo che è variabile. Se lo stesso intervallo di tempo è impiegato dall'onda per viaggiare fino ad un'altezza  $h'$  e quindi tornare indietro con una velocità corrispondente a quella della luce, allora  $h'$  viene chiamata *altezza equivalente di riflessione* ed è data dall'espressione

$$(8.2) \quad h' = \int_0^{h_1} \mu' dh,$$

dove  $\mu'$  è l'indice di rifrazione di gruppo. Trascurando il campo magnetico terrestre e l'effetto delle collisioni dalla (7.4) si ricava

$$(8.3) \quad \mu' = \frac{1}{\mu} = (1-X)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{con} \quad X = (e^2 / \epsilon_0 m \omega^2) N(h),$$

dove  $N(h)$  rappresenta il profilo verticale di densità elettronica.

È importante una volta di più rimarcare il fatto che la (8.3) è valida trascurando il campo magnetico e nel caso in cui l'effetto delle collisioni sia molto piccolo. Quando si considera un campo magnetico le espressioni per gli indici di rifrazione di gruppo delle due componenti magnetoioniche sono molto più complicate e, a rigore, non è corretto usare la (8.3) anche solo per la componente ordinaria.

### 8.4 Assorbimento dell'onda

L'assorbimento totale subito dall'onda nel suo viaggio verticale di andata e ritorno verso la quota dove  $\mu=0$  può essere espresso in termini di un coefficiente di riflessione  $\rho$  definito come il rapporto tra il campo d'onda ricevuto e quello che verrebbe invece ricevuto in assenza di assorbimento. Il coefficiente di riflessione è definito come segue

$$(8.4) \quad \rho = \exp \left\{ -2 \int_{\mu=1}^{\mu=0} \kappa dh \right\}.$$

In assenza di un campo magnetico esterno il coefficiente d'assorbimento  $\kappa$  è dato dalla (2.19), dove si è posto  $\omega_L=0$ , che sostituita nella (8.4) dà

$$(8.5) \quad -\log \rho = \frac{e^2}{\epsilon_0 c m} \int_{\mu=1}^{\mu=0} \frac{N \nu}{\mu (\omega^2 + \nu^2)} dh.$$

La (8.5) rappresenta l'assorbimento totale subito dall'onda. Si vuole adesso considerare separatamente l'assorbimento prodotto dove  $\mu \approx 1$  (assorbimento non-deviativo) e dove  $\mu$  si discosta fortemente da 1 (assorbimento deviativo).

#### 8.4.1 Assorbimento non-deviativo

Quando  $\mu=1$  la (8.5) mostra che l'assorbimento non-deviativo  $\rho_{ND}$  è dato da

$$(8.6) \quad -\log \rho_{ND} = \frac{e^2}{\epsilon_0 cm} \int_0^h \frac{Nv}{\omega^2 + v^2} dh.$$

Spesso può essere assunto che nelle regioni responsabili della maggior parte dell'assorbimento  $\omega^2 > v^2$  in modo tale che la (8.6) diventi

$$(8.7) \quad -\log \rho_{ND} = \frac{e^2}{\epsilon_0 cm \omega^2} \int_0^h Nv dh,$$

e dalla (8.7) si vede che

$$(8.8) \quad -\log \rho_{ND} \propto \omega^{-2}.$$

La (8.8) è spesso usata per caratterizzare l'assorbimento non-deviativo.

Se si usa la (8.7) per calcolare l'assorbimento prodotto dal doppio attraversamento di uno strato di Chapman allora si usano per  $N$  e  $v$  le seguenti relazioni

$$(8.9) \quad N(h) = N_0 \exp \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{h}{H} - \sec \chi \exp \left( -\frac{h}{H} \right) \right\} \right]$$

$$(8.10) \quad v = v_0 \exp \left( -\frac{h}{H} \right),$$

e si ottiene

$$(8.11) \quad -\log \rho_{ND} = 4.13 \frac{N_0 e^2 H}{\epsilon_0 cm} \frac{v_0}{\omega^2} (\cos \chi)^{3/2} = 4.13 \frac{e^2 H}{\epsilon_0 cm} \frac{N_m v_m}{\omega^2},$$

dove  $N_m$  e  $v_m$  rappresentano i valori di  $N$  e  $v$  in corrispondenza del massimo dello strato mentre  $N_0$  e  $v_0$  rappresentano i valori di  $N$  e  $v$  in corrispondenza del massimo dello strato quando  $\chi=0$ . La (8.11) ci dice che se tutto l'assorbimento di un eco ricevuto dalla regione F fosse causato da un assorbimento non-deviativo di uno strato E di Chapman allora  $\log \rho$  sarebbe proporzionale a  $(\cos \chi)^{3/2}$ , e sempre dalla (8.11) si vede che la quantità  $(\cos \chi)^{3/2}$  sarebbe proporzionale a  $N_m$  e  $v_m$ . In realtà gli esperimenti non sono in accordo con la teoria e quindi tutto ciò porta a pensare che l'onda subisca un assorbimento anche in altre zone della ionosfera.

#### 8.4.2 Assorbimento deviativo

Quando l'onda subisce un assorbimento in una regione dove  $\mu$  si scosta da 1 allora si può usare la (2.21) che viene riportata di seguito

$$(8.12) \quad \kappa = \frac{v}{2c} \frac{1}{(1 \pm |Y_L|)} \left\{ \frac{1}{\mu} - \mu \right\}$$

e, in assenza di campo magnetico, inserendo la (8.12) nella (8.4) si ottiene

$$(8.13) \quad -\log \rho_D = 2 \int_1^2 \kappa dh = \frac{v}{2c} \left[ 2 \int_1^2 \frac{dh}{\mu} - 2 \int_1^2 \mu dh \right] = \frac{v}{2c} (P' - P).$$

In assenza di campo magnetico la quantità  $1/\mu$  rappresenta l'indice di rifrazione di gruppo (perchè in assenza di campo magnetico  $\mu' = 1/\mu$ ) e quindi nella (8.13) i due termini rappresentano rispettivamente il cammino di gruppo  $P'$  e il cammino di fase  $P$  percorsi dall'onda. Il valore di  $\rho_D$  può essere grande sia perchè  $v$  è grande ma anche perchè  $(P' - P)$  è grande. Nel caso di assorbimento non-deviativo  $\mu$  e  $\mu'$  sono entrambi vicini a 1 e quindi  $(P' - P)$  è piccolo; l'assorbimento è tuttavia grande perché  $v$  è grande e l'equazione (8.13) non sarebbe in questo caso molto utile. In altre circostanze  $v$  non è molto grande e  $\rho$  assume valori importanti solo quando  $(P' - P)$  è grande. Questo implica che  $\mu$  e  $\mu'$  si discostino apprezzabilmente da 1, che è proprio ciò che accade quando l'onda si trova vicino alla zona di riflessione dove  $\mu'$  è grande (perchè la velocità di gruppo  $v_g$  tende a zero) mentre  $\mu$  tende a zero.

Misurazioni di  $(P' - P)$  associate a variazioni di  $\log \rho_D$ , in condizioni di penetrazione dello strato, sono stati usate per determinare tramite la (8.13) i valori di  $v$  a determinate altezze.

## 9. Applicazioni alla ionosfera terrestre: un modello di ionosfera con campo magnetico

Quando è presente un campo magnetico l'onda elettromagnetica trasmessa verticalmente verso la ionosfera viene birifratta in due onde caratteristiche indipendenti. Se i cambiamenti verticali della ionosfera sono sufficientemente graduali, tali onde caratteristiche mantengono la loro indipendenza e la polarizzazione di ognuna cambia gradualmente in modo tale che ad ogni quota si ha quello che si avrebbe in una ionosfera omogenea con le caratteristiche proprie della quota in esame. Se non ci fossero collisioni e il campo magnetico non fosse esattamente verticale  $\mu^2$  avrebbe l'andamento mostrato in Figura 9.1 e le riflessioni delle due componenti avverrebbero per  $X=1$  e  $X=1-Y$  quando  $Y<1$  e per  $X=1$  e  $X=1+Y$  quando  $Y>1$ .

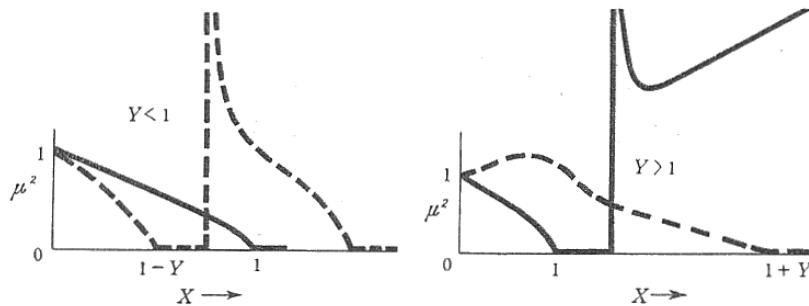


Figura 9.1

Consideriamo adesso cosa succederebbe in un modello semplice di ionosfera del tipo di quello in Figura 8.1, dove la densità elettronica  $N$ , sopra un'altezza  $h_0$ , è proporzionale a  $(h-h_0)$  fino ad un'altezza  $h_m$  in corrispondenza della quale si ha il massimo di densità elettronica  $N_m$ .

È interessante a questo punto graficare le curve che rappresentano le altezze alle quali  $X$  diventa uguale a  $1-Y$ ,  $1$  e  $1+Y$  per una serie di differenti radio frequenze, e a tale proposito è conveniente normalizzare tutte le frequenze e esprimerele come multipli della girofrequenza  $\omega_H$ . In Figura 9.2 le ascisse rappresentano  $\omega^2/\omega_H^2 (=1/Y^2)$  e sono proporzionali al quadrato della radio frequenza, le ordinate rappresentano  $\omega_N^2/\omega_H^2$  e sono proporzionali alla densità elettronica  $N$ . L'onda ordinaria viene riflessa ad un'altezza dove  $X=1$ , il che significa  $\omega=\omega_N$  e questo è rappresentato dalla curva DKHE. L'onda straordinaria viene riflessa ad un'altezza dove  $X=1\pm Y$ , il che significa  $\omega_N^2/\omega_H^2=\omega^2/\omega_H^2\pm\omega/\omega_H$  e questo è rappresentato dalle curve DLIC e BJFA. In primo luogo si suppone che il massimo di densità elettronica dello strato venga raggiunto ad un'altezza  $h_m$  corrispondente alla linea (a) della Figura 9.2 e consideriamo quello che succede al variare, o meglio al diminuire, della frequenza dell'onda. La riflessione dell'onda straordinaria avviene prima dall'altezza  $h_m$  ad una frequenza corrispondente al punto A e come la frequenza viene ridotta l'altezza di riflessione si riduce fino a raggiungere la base  $h_0$  dello strato in corrispondenza di un valore della frequenza uguale a quello della girofrequenza  $\omega_H$  (punto B della Figura 9.2). Per valori ancora più bassi della frequenza (quindi per  $\omega<\omega_H$ ) la riflessione dell'onda straordinaria avverrebbe per altezze rappresentate dal tratto di curva CD. L'onda ordinaria inizia ad essere riflessa ad un'altezza  $h_m$  per una frequenza corrispondente al punto E della Figura 9.2 e la sua altezza di riflessione scende uniformemente a  $h_0$  in corrispondenza di una frequenza nulla. Tutto questo è schematicamente riassunto in Figura 9.3 dove le linee nere rappresentano l'onda ordinaria mentre le linee tratteggiate rappresentano l'onda straordinaria.

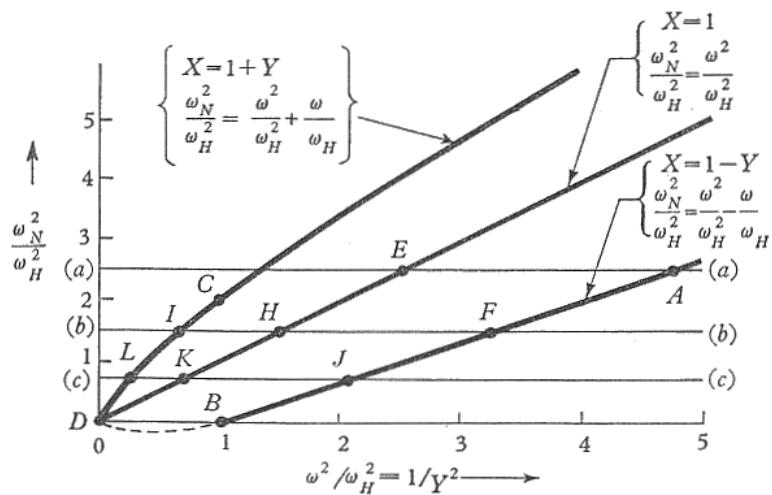


Figura 9.2

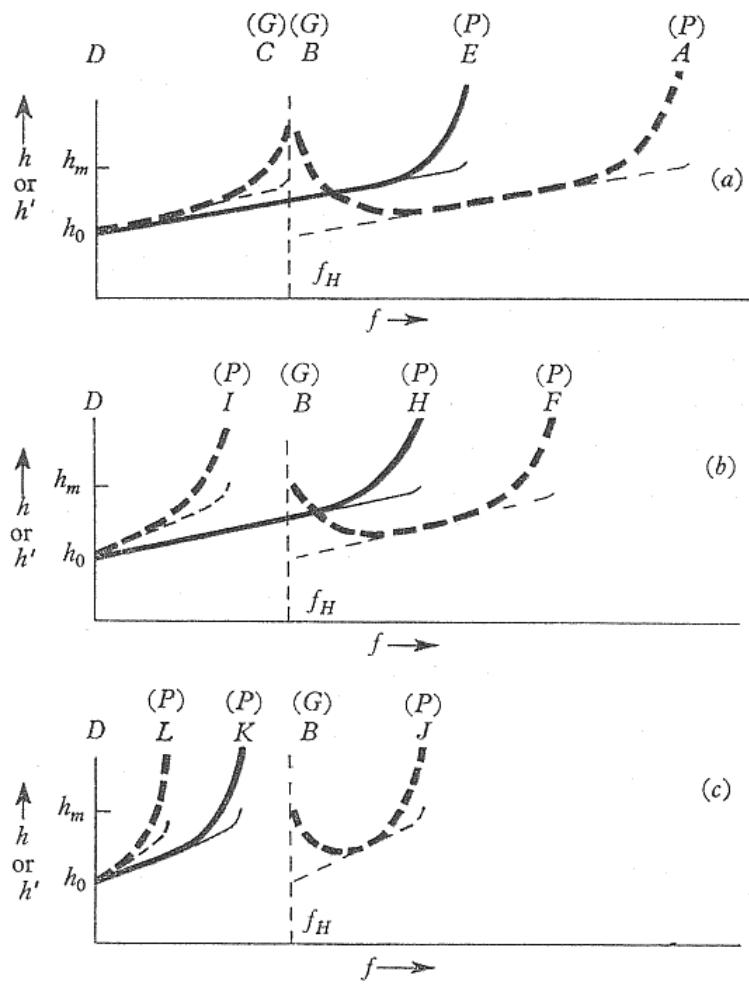


Figura 9.3

Le linee più spesse rappresentano l'altezza equivalente di riflessione, mentre quelle più fini rappresentano le altezze reali di riflessione. Nell'interpretazione di queste curve bisogna ricordare quanto visto a proposito della velocità di gruppo (capitolo 7) ed in particolare che per frequenze non troppo vicine alla girofrequenza l'indice di rifrazione di gruppo assume valori grandi quando il valore della densità elettronica è prossimo al valore critico necessario alla riflessione dell'onda, quindi per  $X$  vicino a 1 (onda ordinaria) o  $1 \pm Y$  (onda straordinaria) (vedi Figure 7.1, 7.2 e 7.3).

Quando la riflessione avviene in prossimità del massimo dello strato c'è un considerevole path dove  $X \approx 1$  (o  $X \approx 1 \pm Y$ ) e quindi dove il ritardo di gruppo è rilevante (ossia l'onda reale, che viaggia con una certa velocità di gruppo, rispetto a quella che viaggia alla velocità della luce rallenta drasticamente); l'aumento del ritardo di gruppo, per esempio, vicino i punti A e E della Figura 9.3a è proprio dovuto a questo ed è indicato con P per rimarcare la sua relazione con la frequenza di penetrazione (in realtà tutti i punti della linea nera sono punti che corrispondono alla condizione  $X=1$ , ma il ritardo di gruppo è molto più marcato nelle vicinanze del massimo dello strato; analogo discorso per le linee tratteggiate).

Per l'onda straordinaria e per frequenze vicine alla girofrequenza l'indice di rifrazione di gruppo assume valori grandi per un intorno di valori di  $N$  centrato sul valore necessario alla riflessione dell'onda (vedi Figure 7.2 e 7.3 per valori di  $Y$  prossimi a 1); il considerevole ritardo di gruppo, per esempio, vicino i punti B e C della Figura 9.3a è proprio dovuto a questo. Quindi è un ritardo di gruppo che non è in alcun modo associato con la penetrazione dello strato (infatti non è relazionato con la massima densità elettronica dello strato come invece era il caso dei punti A e E) ed è indicato con G proprio per rimarcare la sua relazione con la girofrequenza.

Se lo strato con il massimo di ionizzazione non fosse rappresentato dalla linea (a) ma dalle linee (b) e (c) della Figura 9.2, allora le corrispondenti curve  $h(f)$  e  $h'(f)$  sarebbero quelle di Figura 9.3.b e 9.3.c.

Se gli strati fossero due, uno sopra l'altro, la forma della curva  $h'(f)$  dipende da quale linea della Figura 9.2 (tra la (a), la (b) o la (c)) rappresenta il massimo di densità elettronica dello strato; una serie di possibilità è illustrata in Figura 9.4 dove le lettere corrispondono a quelle della Figura 9.2, quelle superiori corrispondono allo strato superiore mentre quelle inferiori allo strato inferiore.

---

NOTA: guardando la Figura 9.2 sembra che in alcuni casi la riflessione dell'onda straordinaria sullo strato inferiore possa avvenire prima della riflessione dell'onda ordinaria sullo strato superiore. Ad esempio se si considera come strato superiore la linea (a) e come strato inferiore la linea (b) si dovrebbe avere una riflessione dell'onda straordinaria sullo strato superiore in A, quindi un'altra riflessione dell'onda straordinaria sullo strato inferiore in F e quindi la riflessione dell'onda ordinaria sullo strato superiore in E; ora però guardando la Figura 9.4 si capisce che così non è. In realtà questa è una cosa che potrebbe accadere se gli strati fossero abbastanza vicini, come è effettivamente il caso rappresentato dalla Figura 9.2, cosa che nella realtà non accade. Quindi la Figura 9.2 non rappresenta esattamente quello che si ha nella Figura 9.4, c'è un piccolo difetto di forma.

---

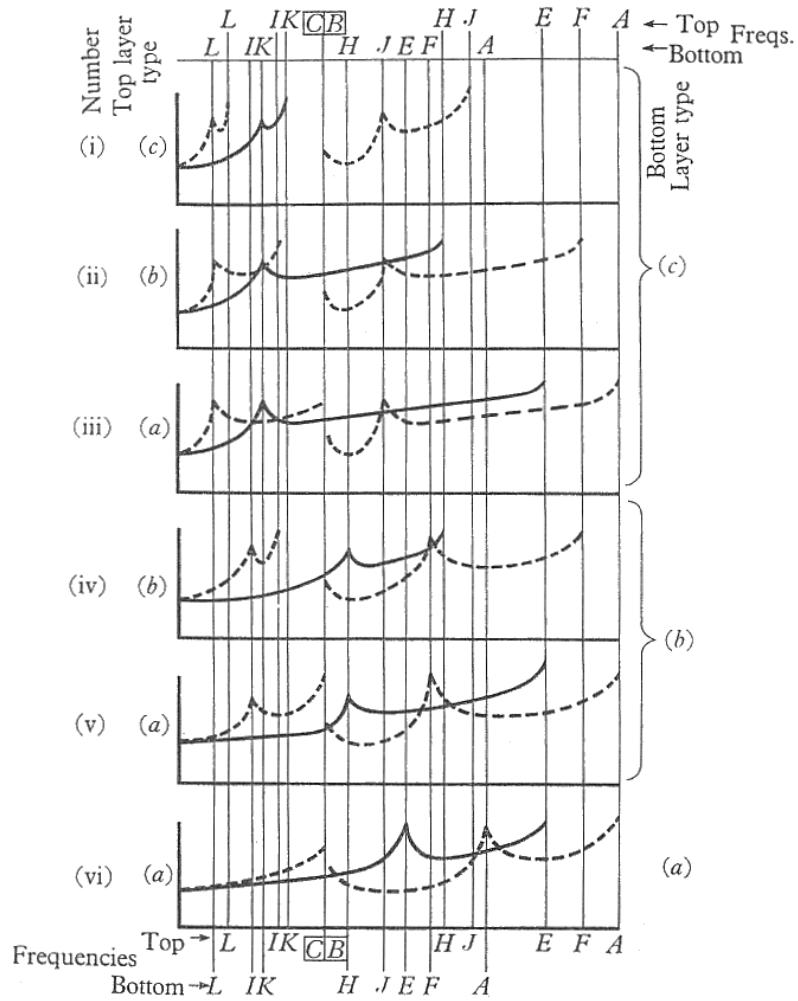


Figura 9.4

Usualmente accade che le più alte frequenze a cui avviene la riflessione delle due componenti sono entrambe più alte della girofrequenza in modo tale che la parte finale della curva  $h'(f)$  sia uguale a quella di Figura 9.3.a e 9.3.b. Si è già visto che le frequenze di penetrazione dell'onda straordinaria soddisfano le relazioni

$$(9.1) \quad (X-1)^2 = Y^2 \rightarrow \begin{cases} X-1 = Y \Rightarrow \frac{\omega_N^2}{\omega^2} - 1 = \frac{\omega_H}{\omega} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_N^2 + \frac{\omega_H^2}{4}} - \frac{\omega_H}{2} \\ X-1 = -Y \Rightarrow \frac{\omega_N^2}{\omega^2} - 1 = -\frac{\omega_H}{\omega} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\omega_N^2 + \frac{\omega_H^2}{4}} + \frac{\omega_H}{2} \end{cases}.$$

Dalle (9.1) si evince che per alte frequenze  $\omega_{\text{str}} - \omega_{\text{ord}} \approx (1/2)\omega_H$ . Quindi, in assenza di collisioni, la curva sperimentale è splittata in due dal campo magnetico terrestre e quando le frequenze di penetrazione non sono piccole c'è una differenza costante in frequenza tra le due pari a  $(1/2)\omega_H$ .

Quando vengono considerate le collisioni tra gli elettroni e le particelle pesanti in prima istanza bisogna decidere quali, tra le approssimazioni QT e QL, è la più appropriata. Alla quota dove  $X=1$  l'approssimazione QT è valida se  $v < (1/3)\omega_c$  e si è già visto che, sebbene in presenza di collisioni  $\mu$  non diventa uguale a zero per  $X=1$ , c'è tuttavia la possibilità di avere

una marcata riflessione se  $Z < 0.1$  (vedi §6.1). Se invece alla quota dove  $X=1$  è  $v > 3\omega_c$  allora dovrà essere usata l'approssimazione QL e, per  $Y < 1$ , gli indici di rifrazione dell'ordinario e dello straordinario andranno a zero alle quote dove  $X=1+Y$  e  $X=1-Y$ .

Ricapitolando:

- a) se  $v < (1/3)\omega_c$  alla quota dove  $X=1$ , le due onde sono riflesse vicino  $X=1$  e  $X=1-Y$  (se  $Y < 1$ ), o  $X=1+Y$  (se  $Y > 1$ ), come accadrebbe in assenza di collisioni e la relazione tra le due frequenze di penetrazione rimane  $|\omega_{\text{str}} - \omega_{\text{ord}}| \approx (1/2)\omega_H$ ;
- b) se invece  $v > 3\omega_c$  alla quota dove  $X=1$ , con  $Y < 1$ , le due onde sono riflesse alle quote dove  $X=1+Y$  e  $X=1-Y$  e la relazione tra le frequenze di penetrazione è  $\omega_{\text{str}} - \omega_{\text{ord}} \approx \omega_H$ ; con  $Y > 1$ , sempre in condizioni  $v > 3\omega_c$  alla quota dove  $X=1$ , viene riflessa solo un'onda alla quota dove  $X=1+Y$ .

In prima battuta si potrebbe pensare che la relazione  $\omega_{\text{str}} - \omega_{\text{ord}} \approx (1/2)\omega_H$ , quando  $v^2 \ll \omega_c^2$  alla quota dove  $X=1$ , possa essere usata per avere un valore accurato di  $\omega_H$  e quindi di  $H$  in corrispondenza dell'altezza di riflessione. In realtà questo non è possibile a causa della non isotropia della ionosfera che fa sì che i pacchetti d'onda del radio impulso non necessariamente viaggino verticalmente verso lo stesso punto; le due componenti magnetoioniche sono deviate differentemente e raggiungono punti diversi dove il massimo di densità elettronica può essere differente. Ad esempio ad alte latitudini i valori osservati delle due frequenze di penetrazione sembrano essere consistenti con il fatto che i loro punti di riflessione sullo strato F siano separati orizzontalmente di circa 60 Km.

### 9.1 Triplo splitting e raggio Z

Nei siti dove l'angolo d'inclinazione magnetica è elevato spesso accade che la traccia sperimentale sia caratterizzata da un triplo splitting come si può vedere in Figura 9.5.

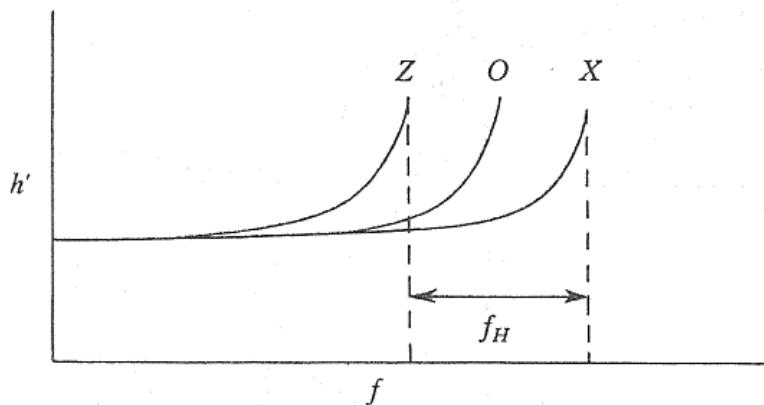


Figura 9.5

La separazione delle frequenze di penetrazione del raggio Z e del raggio X è uguale a  $\omega_H$  e inoltre si è visto che il raggio Z ha la stessa polarizzazione del raggio O. Riguardo a questo fenomeno di seguito vengono illustrate due possibili spiegazioni.

SPIEGAZIONE DI ECKERSLEY E RYDBECK: se l'angolo tra la normale al fronte d'onda e il campo magnetico terrestre non è troppo grande le curve  $\mu(X)$  e  $\chi(X)$  per l'onda ordinaria e straordinaria sono come quelle riportate in Figura 9.6; l'onda ordinaria verrebbe riflessa vicino C, dove  $X=1$ , e la straordinaria vicino G, dove  $X=1-Y$ . Comunque vicino il punto dove  $X=1$  entrambe le onde caratteristiche possono propagarsi e questo è rappresentato dalla linea continua BC, per l'onda ordinaria, e dalla linea tratteggiata DE, per l'onda straordinaria.

Inoltre le curve  $\mu(X)$  e  $\chi(X)$  possono anche essere usate per studiare la polarizzazione  $R$  delle due onde in virtù del fatto che  $n(=\mu \cdot i \chi)$  e  $R$  sono legate, in assenza di collisioni, dalla (1.41) (in presenza di collisioni basta aggiungere il termine  $-iZ$  al denominatore).

Bisogna porre l'attenzione sui seguenti punti: (a) vicino  $X=1$  le quantità  $\mu$ ,  $\chi$  e  $R$ , per entrambe le onde, cambiano rapidamente al variare di  $X$  e (b) nella parte ombreggiata della Figura 9.6  $\mu$ ,  $\chi$  e quindi  $R$ , dell'onda ordinaria e straordinaria, non sono molto differenti.

Quindi quando un'onda ordinaria, viaggiando in un mezzo in cui  $X$  cresce gradualmente, raggiunge la zona corrispondente a quella ombreggiata in Figura 9.6, per rimanere un'onda ordinaria caratteristica, deve cambiare rapidamente la sua polarizzazione; potrebbe quindi succedere che per un piccolo cambiamento di polarizzazione essa si inizi a propagare come un'onda straordinaria. Come risultato si ha in effetti che parte dell'energia viene trasferita al ramo DEF della curva straordinaria di Figura 9.6 e quindi viaggia ancora più su nello strato F venendo riflessa alla quota dove  $X=1+Y$ ; ed è proprio questa riflessione che è responsabile del raggio Z. Nel suo viaggio di ritorno dalla quota dove  $X=1+Y$  avviene un ulteriore accoppiamento e parte dell'energia passa al ramo AB dell'onda ordinaria e quindi il raggio Z ha una polarizzazione uguale a quella che ha l'onda ordinaria riflessa alla quota  $X=1$ .

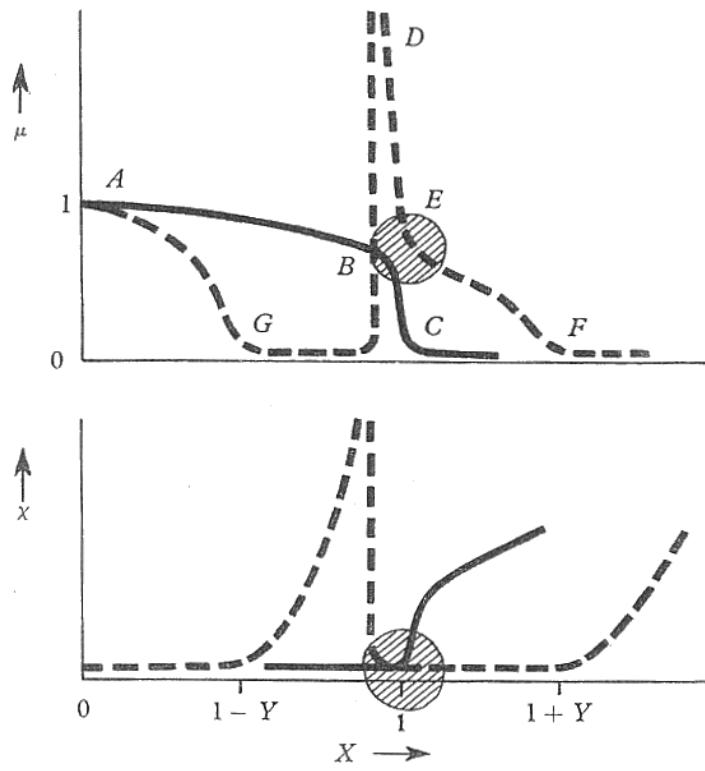


Figura 9.6

SPIEGAZIONE DI ELLIS: un radio impulso incidente sulla ionosfera viene spartito nell'onda ordinaria e nell'onda straordinaria e l'onda straordinaria incidente verticalmente viene riflessa ad una quota dove  $X=1-Y$ . Se la frequenza di collisione è piccola risulta valida l'approssimazione QT per l'onda ordinaria incidente verticalmente (vedi §5.1) che, quando raggiunge la quota dove  $X=1$ , viene quindi riflessa.

Il raggio Z è causato da parte dell'impulso dell'onda ordinaria incidente in modo obliquo sulla ionosfera con un angolo  $i$ . Questo impulso viene rifratto man mano che penetra nella ionosfera e ad una quota dove l'indice di rifrazione è  $\mu$  la normale al fronte d'onda forma un angolo  $\Phi$  con la verticale dato da

$$(9.2) \quad \sin i = \mu \sin \Phi.$$

Per certi valori di  $i$  può succedere che alla quota dove  $X=1$  l'angolo  $\Phi$  coincida con l'angolo  $\Phi_H$  (vedi Figura 9.7) complementare dell'angolo di inclinazione magnetica del campo magnetico terrestre; in tal modo anche se la frequenza di collisione è piccola risulta valida l'approssimazione QL e quindi  $\mu$  non riesce a raggiungere valori piccoli alla quota dove  $X=1$ . Di conseguenza alla quota dove  $X=1$ , al contrario di quanto accade per l'onda incidente verticalmente, l'onda incidente obliquamente non viene riflessa. Tale onda continua quindi a propagarsi verso quote più elevate fino alla quota dove  $X=1+Y$ ; qui  $\mu$  assume valori piccoli e l'onda viene riflessa (in realtà poiché l'angolo di incidenza è  $i$  l'onda è riflessa dove  $\mu = \sin i$  ma in questo contesto  $i$  è piccolo (circa  $10^\circ$ ) ed è sufficientemente accurato porre  $\mu=0$ ).

Ora dato che la riflessione è obliqua l'onda ritornerà alla quota dove  $X=1$  secondo una direzione che non è parallela al campo magnetico terrestre e quindi l'approssimazione QL non è più valida;  $\mu$  è quindi piccolo (perchè l'approssimazione QL non è più valida), l'assorbimento è grande e l'onda non riesce quindi a ritornare sulla Terra. Se però ci sono delle irregolarità nella distribuzione elettronica vicino la quota dove  $X=1+Y$ , dove  $\mu$  è piccolo, ci possono essere forti fenomeni di scattering e un'apprezzabile parte dell'energia può quindi ritornare indietro lungo la direzione d'incidenza e dato che in questo caso le condizioni sono le stesse che hanno caratterizzato l'onda incidente (approssimazione QL perchè  $\Phi=\Phi_H$ ) l'onda non ha difficoltà a penetrare la quota dove  $X=1$ .

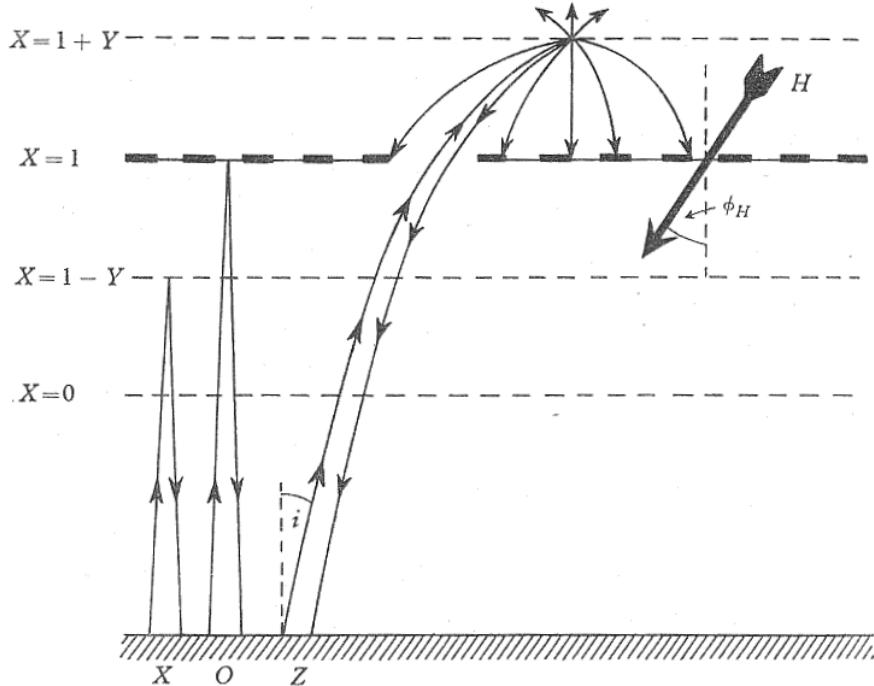


Figura 9.7

Le onde scatterate indietro dalla quota dove  $X=1+Y$ , in una direzione piuttosto differente da quella identificata da  $\Phi_H$ , in corrispondenza della quota dove  $X=1$  non si troveranno in approssimazione QL e quindi non riusciranno a passare; è come se alla quota dove  $X=1$  ci fosse una finestra permessa al di fuori della quale le onde scatterate non riescono a raggiungere la Terra.

## 9.2 Frequenze basse e ionosfera bassa

Fino ad ora sono state trattate soprattutto onde con frequenza prossima o superiore alla girofrequenza e sono stati quindi discussa la penetrazione degli strati ionosferici. In questo paragrafo saranno considerate le basse frequenze e gli strati bassi della ionosfera e sarà quindi conveniente supporre che la densità elettronica cresca esponenzialmente con l'altezza senza che ci sia un limite.

A tale proposito si riconsidera il modello di ionosfera illustrato in Figura 8.2 tenendo però questa volta in considerazione il fatto che è presente un campo magnetico. Il modello di Figura 8.2 è ripetuto in Figura 9.8 dove l'andamento della frequenza di collisione con l'altezza è rappresentato dalla linea AB mentre l'andamento della densità elettronica è rappresentato dalla linea CD che rappresenta l'andamento della frequenza angolare di plasma  $\omega_N$  in funzione dell'altezza.

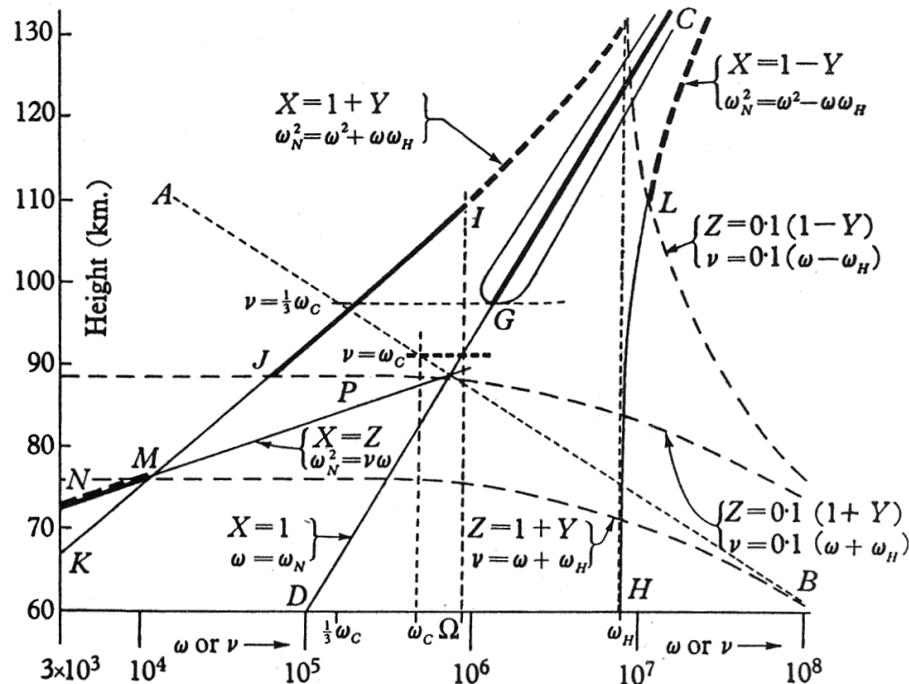


Figura 9.8

La frequenza indicata con  $\Omega$  è importante perché è quella frequenza in corrispondenza della quale si ha  $X=1$  dove  $v=\omega_c$  (tale uguaglianza, come mostrato nel capitolo 4 pag. 40-41, è molto importante; si è visto infatti che, al passaggio di  $X=1$ , a seconda che  $|\omega_c/v|>1$  o  $|\omega_c/v|<1$  il segno che rappresenta l'onda ordinaria e straordinaria può cambiare). Il livello al quale  $v=(1/3)\omega_c$  viene al solito utilizzato per delimitare le regioni in cui è valida l'approssimazione QT, quando  $X=1$ , così come spiegato nel §5.1. Sono disegnate anche le linee  $X=1+Y$  e  $X=1-Y$ . Se quindi  $v$  non è mai abbastanza grande da impedire a  $\mu$  di raggiungere valori piccoli vicino  $X=1$  o  $X=1\pm Y$ , allora si hanno delle riflessioni nei seguenti casi:

- (a) a patto che valga l'approssimazione QT dove  $X=1$ , l'onda ordinaria sarà riflessa dalla corrispondente altezza, così come indicato dalla linea spessa continua CG. Le frequenze interessate da questa riflessione sono quelle che vanno da  $\Omega$  fino all'infinito.
- (b) Per frequenze maggiori di  $\Omega$  l'onda straordinaria sarà riflessa ad un'altezza dove  $X=1-Y$  (linea CLH), se  $\omega>\omega_H$ , e ad un'altezza dove  $X=1+Y$  (linea tratteggiata CI) se  $\omega<\omega_H$ .

- (c) Per frequenze minori di  $\Omega$  l'onda ordinaria sarà riflessa ad un'altezza dove  $X=1+Y$  come rappresentato dalla linea continua IK. Questo perché, per frequenze minori di  $\Omega$ , l'onda ordinaria passa ad un'altezza dove  $X=1$ , dove in questo caso non viene riflessa perché il valore della frequenza di collisione non è piccolo, in corrispondenza di una condizione  $|\omega_c/v|<1$ . Questo implica che nel passaggio per  $X=1$  (ricordarsi dei discorsi fatti nel capitolo 4 pag. 40-41) per poter continuare a parlare di onda ordinaria nella (1.49) non dobbiamo più considerare il segno + ma il segno -, in corrispondenza del quale la condizione di riflessione è proprio  $X=1+Y$  (perché siamo nella condizione  $\omega<\omega_H$ ).

Si vuole adesso vedere in che modo le collisioni possono interferire con le riflessioni impedendo a  $\mu$  di raggiungere valori piccoli, e per fare questo si farà riferimento alle regole di carattere generale illustrate nel §6.5.

Per i discorsi fatti nel §6.3 e poi riassunti nel §6.5 si è visto che se  $Z>0.1(1\pm|Y_L|)$  allora  $\mu$  non potrà mai raggiungere valori piccoli alle altezze dove  $X=1\pm Y_L$ . Nella Figura 9.8 sono mostrate le linee  $Z>0.1(1\pm Y_L)$  che intersecano le curve  $X=1\pm Y_L$  nei punti J e L, che rappresentano quindi le frequenze più basse che possono essere riflesse per  $X=1\pm Y_L$ .

Per quanto riguarda le frequenze minori di J si possono riprendere i discorsi fatti nel §6.2 sulla riflessione dove  $X=1$  (in questo caso, sempre ricordandosi delle relazioni ricavate nel §5.4 tra l'espressione di  $n$  in approssimazione QL e quella relativa al caso di assenza di campo magnetico, è  $X'=1$  ossia  $X=1+Y_L$ ) quando  $Z^2>>1$  (in questo caso è  $Z^2>>1$ ). Nel §6.2 è stato detto che essendo  $Z^2>>1$ , dove  $X=1$ , nessuna riflessione è possibile per l'onda ordinaria. È stato però anche detto che all'aumentare della quota la densità elettronica (proporzionale a  $X$ ) aumenta e la frequenza di collisione (proporzionale a  $Z$ ) diminuisce e quindi il rapporto  $X/Z$  cresce fino ad una quota dove  $X=Z$ ; se in corrispondenza di ciò  $\chi$  cambia marcatamente (al contrario di  $\mu$  che invece rimane praticamente invariato) e abbastanza rapidamente (o meglio in una distanza che è comparabile con la lunghezza d'onda,) allora si è detto che è possibile che la riflessione possa avvenire. In virtù di ciò in Figura 9.8 è disegnata la linea in corrispondenza della quale  $X=Z$ ; su questa, il tratto MN rappresenta proprio quello dove è possibile che avvenga una riflessione dell'onda (perché è il tratto di linea, corrispondente a  $X=Z$ , dove si può considerare  $Z^2>>1$ ).

## 10. Onde in una miscela di ioni e elettroni

Nei calcoli effettuati nel capitolo 1 è stato assunto che, sebbene gli elettroni e gli ioni siano presenti in numero uguale, solo gli elettroni influenzano la propagazione dell'onda elettromagnetica, in quanto per gli elettroni il rapporto  $N/m$  è di gran lunga più grande rispetto a quello degli ioni. In questo capitolo la questione viene esaminata un po' più in dettaglio e verranno ricavate delle espressioni che permetteranno di capire come gli ioni, a patto che siano sufficientemente numerosi, possano influenzare la propagazione delle onde.

Le girofrequenze degli ioni di massa  $m_i$  e degli elettroni di massa  $m_e$  sono uguali rispettivamente a  $(\mu_0 H_0 e / m_i)$  e  $(\mu_0 H_0 e / m_e)$  (nella ionosfera terrestre la girofrequenza elettronica è circa 1.2 MHz, mentre quella ionica è pari circa a 50 Hz), e quindi il loro rapporto è  $m_e / m_i$  (circa  $4 \cdot 10^5$ ).

Nel seguito verranno considerate onde di frequenza molto più grande della girofrequenza ionica in modo che l'effetto del campo magnetico esterno sul moto degli ioni possa essere trascurato. Se la frequenza dell'onda fosse comparabile con la girofrequenza degli ioni allora i calcoli eseguiti in questo capitolo risulterebbero non appropriati; una tale circostanza potrebbe ad esempio verificarsi nella ionosfera solare vicino ad una macchia solare caratterizzata da un forte campo magnetico.

### 10.1 L'indice di rifrazione della miscela

Le equazioni del moto degli elettroni sono date, come in assenza degli ioni, dalle (1.32) che qui riscriviamo

$$(10.1) \quad \begin{cases} \epsilon_0 X_e E_x = -P_{xe} - iY_L P_{ye} + iY_T P_{ze}, \\ \epsilon_0 X_e E_y = -P_{ye} + iY_L P_{xe}, \\ \epsilon_0 X_e E_z = -P_{ze} - iY_T P_{xe}. \end{cases}$$

Dato che si è detto che l'azione del campo magnetico sugli ioni può essere trascurata, le corrispondenti equazioni del moto per gli ioni risultano essere

$$(10.2) \quad \begin{cases} \epsilon_0 X_i E_x = -P_{xi}, \\ \epsilon_0 X_i E_y = -P_{yi}, \\ \epsilon_0 X_i E_z = -P_{zi}, \end{cases}$$

e, se gli elettroni non fossero presenti, l'onda (vedi (1.9), (1.14) e (1.15)) avrebbe un indice di rifrazione  $n_i$  dato da

$$(10.3) \quad n_i^2 = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{|\mathbf{P}_i|}{|\mathbf{E}|} = 1 - X_i.$$

La polarizzazione totale è data da

$$(10.4) \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e,$$

e la terza equazione delle (1.16) richiede che

$$(10.5) \quad P_z = P_{zi} + P_{ze} = -\epsilon_0 E_z.$$

Sostituendo la (10.3) nella (10.5) si ottiene

$$(10.6) \quad \epsilon_0 E_z n_i^2 = -P_{ze}.$$

La (10.6) è la prima equazione che evidenzia il “coupling” che gli elettroni hanno con gli ioni. Sotto l’azione congiunta del campo dell’onda elettromagnetica e del campo magnetico esterno gli elettroni si muovono, in generale, nella direzione  $z$ , e questo “raggruppamento” in questa direzione origina un campo  $E_z$  che quindi agisce sugli ioni.

I calcoli a questo punto sono uguali a quelli fatti nel capitolo 1. Sostituendo la (10.6) nella terza equazione delle (10.1) si ha

$$(10.7) \quad \left(1 - X_e / n_i^2\right) P_{ze} = -i Y_T P_{xe};$$

ricavando  $P_{ze}$  dalla (10.7) e sostituendolo nella prima equazione delle (10.1) si ottiene

$$(10.8) \quad \epsilon_0 X_e \left( E_x / P_{xe} \right) = -\left( 1 - \frac{Y_T^2}{1 - X_e / n_i^2} \right) - i Y_L \left( P_{ye} / P_{xe} \right),$$

e, riarrangiando la seconda equazione delle (10.1), si ha

$$(10.9) \quad \epsilon_0 X_e \left( E_y / P_{ye} \right) = -1 + i Y_L \left( P_{xe} / P_{ye} \right).$$

Nel capitolo 1 si è visto che onde caratteristiche devono soddisfare la condizione

$$(10.10) \quad \frac{P_x}{E_x} = \frac{P_y}{E_y},$$

ma adesso, considerando la (10.3)

$$(10.11) \quad P_x / E_x = (P_{xi} + P_{xe}) / E_x = \epsilon_0 (n_i^2 - 1) + P_{xe} / E_x,$$

e analogamente

$$(10.12) \quad P_y / E_y = (P_{yi} + P_{ye}) / E_x = \epsilon_0 (n_i^2 - 1) + P_{ye} / E_y.$$

La (10.11) e la (10.12) mostrano che se la (10.10) è valida allora

$$(10.13) \quad \frac{P_{xe}}{E_x} = \frac{P_{ye}}{E_y}.$$

Valendo la (10.13) dalle (10.8) e (10.9) si ricava

$$(10.14) \quad i Y_L \left( P_{xe} / P_{ye} \right)^2 - \left[ Y_T^2 / \left( 1 - X_e / n_i^2 \right) \right] \left[ P_{xe} / P_{ye} \right] + i Y_L = 0.$$

L'equazione (10.14) corrisponde alla (1.36) a parte il fatto che ora al posto di  $X$  c'è  $X_e/n_i^2$ . La soluzione della (10.14) dà

$$(10.15) \quad r = \frac{P_{xe}}{P_{ye}} = -\frac{i}{Y_L} \left\{ \frac{\frac{1}{2}Y_T^2}{1 - X_e/n_i^2} \mp \left[ \frac{\frac{1}{4}Y_T^4}{(1 - X_e/n_i^2)^2} + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

che è molto simile alla (1.37). Sostituendo la (10.15) nella (10.9) si ottiene

$$(10.16) \quad \epsilon_0 X_e (E_y/P_{ye}) = -1 + iY_L r \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \frac{P_{ye}}{E_y} = -X_e / (1 - iY_L r).$$

Si è visto nel capitolo 1 che è possibile esprimere l'indice di rifrazione come

$$(10.17) \quad n^2 = 1 + \frac{P_y}{\epsilon_0 E_y},$$

che, in virtù delle (10.3) e (10.16) può essere scritto come

$$(10.18) \quad n^2 = n_i^2 - X_e / (1 - iY_L r)$$

e sostituendo nella (10.18) la (10.15) si ottiene alla fine

$$(10.19) \quad n^2 / n_i^2 = 1 - \frac{X_e / n_i^2}{1 - \frac{1}{2} Y_T^2 / (1 - X_e / n_i^2) \pm \left[ \frac{1}{4} Y_T^4 / (1 - X_e / n_i^2) + Y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Se non ci fossero gli ioni  $n_i^2$  sarebbe uguale a 1 e la (10.19) corrisponderebbe con l'equazione di Altar-Appleton (1.42) per  $n^2$  in termini di  $X$ . Se la (1.42) viene indicata con  $A(X)$  allora la (10.19) può esser riscritta come

$$(10.20) \quad n^2 / n_i^2 = A(X_e / n_i^2).$$

## 11. Calcolo dell'indice di rifrazione usando la notazione tensoriale

Si vuole in questo capitolo calcolare l'indice di rifrazione del mezzo magnetoionico utilizzando la notazione tensoriale, e per fare ciò si considera il problema nella maniera più generale possibile supponendo il campo magnetico imposto  $\mathbf{H}_0$  giacente in una direzione qualsiasi. Le equazioni costitutive del mezzo (1.47) diventano in questo caso

$$(11.1) \quad \begin{cases} \epsilon_0 X E_x = -U P_x - i Y_z P_y + i Y_y P_z, \\ \epsilon_0 X E_y = i Y_z P_x - U P_y - i Y_x P_z, \\ \epsilon_0 X E_z = -i Y_y P_x + i Y_x P_y - U P_z, \end{cases}$$

dove  $U=1-iZ$ . La (11.1) può essere scritta nella seguente forma matriciale

$$(11.2) \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0 X} \begin{pmatrix} -U & -i Y_z & i Y_y \\ i Y_z & -U & -i Y_x \\ -i Y_y & i Y_x & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix},$$

che usando la notazione breve diventa

$$(11.3) \quad \mathbf{E} = \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{P},$$

dove

$$(11.4) \quad \boldsymbol{\sigma}^{-1} = \frac{1}{\epsilon_0 X} \begin{pmatrix} -U & -i Y_z & i Y_y \\ i Y_z & -U & -i Y_x \\ -i Y_y & i Y_x & -U \end{pmatrix}$$

rappresenta il tensore dell'inverso della polarizzabilità (ovviamente se il mezzo fosse isotropo  $\sigma$  sarebbe uno scalare). Per calcolare l'indice di rifrazione bisogna fare adesso uso delle equazioni di Maxwell che per un'onda che si propaga lungo la direzione  $z$  possono essere poste nella forma (1.16, la terza), (1.22) e (1.23) che qui di seguito sono riportate

$$(11.5) \quad \begin{cases} \epsilon_0 (n^2 - 1) E_x = P_x, \\ \epsilon_0 (n^2 - 1) E_y = P_y, \\ -\epsilon_0 E_z = P_z. \end{cases}$$

La forma matriciale della (11.5) è

$$(11.6) \quad \epsilon_0 \begin{pmatrix} n^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix},$$

che considerando la (11.3) e la (11.4) si può anche scrivere

$$(11.7) \quad \frac{1}{X} \begin{pmatrix} n^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -U & -iY_z & iY_y \\ iY_z & -U & -iY_x \\ -iY_y & iY_x & -U \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

La (11.7) implica che

$$(11.8) \quad \begin{vmatrix} -U(n^2 - 1) - X & -iY_z(n^2 - 1) & iY_y(n^2 - 1) \\ iY_z(n^2 - 1) & -U(n^2 - 1) - X & -iY_x(n^2 - 1) \\ iY_y & -iY_x & U - X \end{vmatrix} = 0,$$

che, se si considera  $A=X/(n^2-1)$ , diventa

$$(11.9) \quad \begin{vmatrix} -U - A & -iY_z & iY_y \\ iY_z & -U - A & -iY_x \\ iY_y/(n^2 - 1) & -iY_x/(n^2 - 1) & (U - X)/(n^2 - 1) \end{vmatrix} = 0;$$

se adesso si pone  $Y_y=0$ ,  $Y_z=Y_L$  e  $Y_x=Y_T$  la (11.9) dà

$$(11.10) \quad A^2 + 2A \left[ U - \frac{Y_T^2}{2(U - X)} \right] + U \left[ U - \frac{Y_T^2}{(U - X)} \right] - Y_L^2 = 0$$

che corrisponde praticamente con la (1.49), ossia un'equazione quadratica in  $n^2$  che risolta dà proprio i due valori di  $n^2$  corrispondenti alle due onde caratteristiche.

È interessante a questo punto considerare la natura del tensore di polarizzazione  $\sigma$  che si ottiene invertendo la (11.4)

$$(11.11) \quad \sigma = \frac{-\epsilon_0 X}{U(U^2 - Y^2)} \begin{pmatrix} U^2 - Y_x^2 & -iUY_z - Y_x Y_y & iUY_y - Y_x Y_z \\ iUY_z - Y_x Y_y & U^2 - Y_y^2 & -iUY_x - Y_y Y_z \\ -iUY_y - Y_x Y_z & iUY_x - Y_y Y_z & U^2 - Y_z^2 \end{pmatrix}.$$

Se  $\mathbf{H}_0$  viene preso lungo la direzione  $z$  allora  $Y_x=Y_y=0$  e la (11.11) diventa

$$(11.12) \quad \sigma = \epsilon_0 \begin{pmatrix} CU & -iCY_z & 0 \\ iCY_z & CU & 0 \\ 0 & 0 & -X/U \end{pmatrix},$$

dove  $C=-X/(U^2-Y^2)$ . Il tensore dielettrico può essere scritto nella forma

$$(11.13) \quad \epsilon = \mathbf{1} + \sigma/\epsilon_0,$$

e quindi in virtù della (11.12) si ha

$$(11.14) \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1+CU & -iCY_z & 0 \\ iCY_z & 1+CU & 0 \\ 0 & 0 & 1-X/U \end{pmatrix}.$$

Il tensore dielettrico (11.14) può essere espresso in funzione delle quantità  $n_1^2$ ,  $n_2^2$  e  $n_3^2$  che rappresentano rispettivamente il quadrato dell'indice di rifrazione delle onde ordinaria e straordinaria che si propagano lungo il campo magnetico, e dell'onda ordinaria che si propaga ortogonalmente al campo magnetico, ed espresse dalle relazioni

$$(11.15) \quad \begin{aligned} n_1^2 &= 1 - X/(U + Y_z), \\ n_2^2 &= 1 - X/(U - Y_z), \\ n_3^2 &= 1 - X/U. \end{aligned}$$

Dalle (11.15) segue che

$$(11.16) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) &= 1 + CU, \\ \frac{1}{2}(n_1^2 - n_2^2) &= -CY, \end{aligned}$$

e quindi la (11.14) diviene

$$(11.17) \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) & \frac{1}{2}i(n_1^2 - n_2^2) & 0 \\ -\frac{1}{2}i(n_1^2 - n_2^2) & \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}.$$

La (11.17) dà proprio il tensore dielettrico  $\boldsymbol{\epsilon}$  in termini dei tre indici di rifrazione  $n_1^2$ ,  $n_2^2$  e  $n_3^2$  delle tre onde caratteristiche. Mezzi anisotropi con tensori dielettrici sono familiari nella teoria dell'ottica dei cristalli ma in quel caso i tensori sono di una forma più semplice e possono essere scritti nella forma seguente

$$(11.18) \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix},$$

dove  $n^1$ ,  $n^2$  e  $n^3$  sono gli indici di rifrazione delle onde che si propagano lungo le tre principali direzioni del cristallo.

## Appendice

### A.1 Frequenza di plasma

Vogliamo studiare il moto degli elettroni dovuto al campo elettrico  $\mathbf{E}$  perturbante dell'onda elettromagnetica.

Per fare questo supponiamo che gli elettroni si spostano di una distanza  $x$  rispetto agli ioni, nell'ipotesi che gli ioni siano fissi, che non ci sia moto di agitazione termica, che lo strato sia infinitamente esteso e la configurazione unidimensionale, e che gli elettroni si muovano unicamente in virtù della forza di richiamo esercitata dagli ioni oscillando così attorno alla loro posizione di equilibrio. Come si vede dalla Figura a.1.1 si crea quindi un doppio strato di carica e quindi un campo elettrico  $\mathbf{E}_i$  indotto.

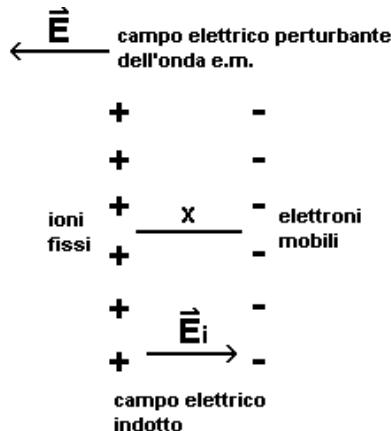


Figura a.1.1

La forza elettrica di richiamo esercitata dagli ioni sugli elettroni (quindi la forza elettrica di richiamo esercitata dal campo elettrico indotto) è

$$(A.1.1) \quad eE_i = e \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Ne^2 x}{\epsilon_0},$$

essendo  $\sigma/\epsilon_0$  il campo elettrico di un doppio strato di carica (si considera il valore della permittività elettrica del vuoto  $\epsilon_0$ ) e  $\sigma=Nex$  (con  $N$  densità elettronica per unità di volume e  $e$  carica dell'elettrone) la densità superficiale di carica (in realtà  $\sigma$  è la densità volumica del cilindretto di base unitaria e altezza  $x$ ; questa densità volumica diventa superficiale perché le cariche vengono sbattute sulle basi di questo cilindretto). L'equazione del moto dell'elettrone è quindi

$$(A.1.2) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{Ne^2}{\epsilon_0} x,$$

con  $m$  massa dell'elettrone e dove il segno  $-$  è dovuto al fatto che la forza di richiamo agisce in verso opposto allo spostamento causato dal campo elettrico perturbante. Gli elettroni descrivono quindi oscillazioni armoniche di frequenza

$$(A.1.3) \quad \omega_N = 2\pi f_N = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}.$$

La  $f_N$  definita dalla (A.1.3), detta *frequenza di plasma*, rappresenta la frequenza con la quale gli elettroni oscillano attorno agli ioni se spostati dalla loro posizione d'equilibrio. Un plasma si può considerare neutro su scale temporali maggiori del corrispondente periodo di oscillazione  $\tau \gg 1/\omega_N$ .

## A.2 Girofrequenza

La forza  $\mathbf{F}$  che si esercita su una carica  $q$  che si muove con velocità  $\mathbf{v}$  in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  è

$$(A.2.1) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = qvB \sin \vartheta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ .

La (A.2.1) mostra che la forza  $\mathbf{F}$  (detta forza di Lorentz) esercitata dal campo magnetico sulla carica  $q$  è proporzionale solo alla componente della velocità ortogonale al campo magnetico; quindi quando una carica si muove all'interno di una regione dove è presente un campo magnetico, la componente della velocità parallela a  $\mathbf{B}$  non viene alterata mentre la componente ortogonale al campo magnetico subirà un'accelerazione. Questa accelerazione tende a piegare la traiettoria della carica attorno alle linee di forza di  $\mathbf{B}$ , che quindi descriverà un'elica (nel caso in cui ci sia una componente della velocità parallela a  $\mathbf{B}$ , altrimenti descriverà un cerchio).

La proiezione su un piano perpendicolare a  $\mathbf{B}$  è quindi un cerchio di raggio  $r_H$ , che viene determinato uguagliando la forza centripeta  $qv_B B$  agente sulla carica, dove  $v_\perp$  è la componente della velocità ortogonale a  $\mathbf{B}$ , con la forza centrifuga  $mr_H \omega_H^2$ ; ne segue che

$$(A.2.2) \quad mr_H \omega_H^2 = qr_H \omega_H B \Rightarrow \omega_H = \frac{qB}{m},$$

dove  $m$  è la massa della carica considerata. La  $\omega_H$  espressa dalla (A.2.2) viene detta *girofrequenza*. A latitudini medie e alle quote ionosferiche si ha  $f_H \sim 1.2 \text{ MHz}$ . Per le girofrequenze ioniche, che si ottengono dalla  $f_H$  moltiplicandola per  $m_e/m_i$ , e che hanno interesse nella interazione delle onde a frequenze molto basse con il magnetoplasma e nella magnetoidrodinamica, il campo di frequenze è al di sotto di 50Hz.

## A.3 Velocità di fase e velocità di gruppo

Finché si trattano problemi che riguardano una sola onda monocromatica, non fa alcuna differenza parlare di velocità di fase o di velocità di gruppo, indipendentemente dal mezzo in cui ci troviamo. In pratica, non ci si imbatte mai in onde così semplici che sono soltanto una rappresentazione matematica semplice di una più complessa realtà fisica. La più monocromatica delle radiazioni presenta sempre uno sparpagliamento  $\Delta\omega$  di componenti di diverse frequenze intorno ad una frequenza fondamentale. Per questa ragione si introduce una velocità di gruppo  $v_g$  che è la velocità dell'insieme di tutte le componenti monocromatiche contenute nell'intervallo  $\Delta\omega$ . Un impulso composto da  $n$  componenti monocromatiche (pacchetto d'onde) viaggia nei mezzi materiali con velocità  $v_g$ ; prima e dopo l'impulso non vi è energia ed è per questo che si dice che la velocità  $v_g$  è la velocità con cui si propaga

l'energia. All'interno dell'impulso che si allarga nel tempo, da qui la dispersività, le onde di frequenza  $\omega_n$  si propagano ognuna con la propria velocità di fase  $v_f$ .

Data un'onda periodica non armonica, a norma del noto teorema di Fourier, è in generale possibile risolverla come somma di un appropriato numero di onde armoniche (*componenti armoniche*), ognuna avente appropriata ampiezza, frequenza, fase iniziale, e rappresentata con una espressione generale del tipo (considerando un'onda che si propaghi lungo  $x$  e polarizzata linearmente lungo  $y$ ):

$$(A.3.1) \quad E_y = a + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t - \varphi_n),$$

dove  $a$  è il valore medio di  $E_y$  e  $\omega$  una costante detta pulsazione fondamentale; l'onda  $A_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$  prende il nome di *componente fondamentale* (o *prima armonica*), mentre le onde cui corrisponde  $n=2, 3, \dots$  prendono il nome di *seconda, terza... armonica*. Se il periodo dell'onda è  $T$ , per  $\omega$  si ha il valore  $2\pi/T$ , le pulsazioni si succedono a intervalli discreti e si ha uno *spettro di Fourier a righe*. Se invece l'onda non è periodica, allo sviluppo in serie (A.3.1) va sostituito uno sviluppo integrale, corrispondentemente alla circostanza che le pulsazioni delle componenti si succedono con continuità, e si ha uno *spettro di Fourier continuo*.

Allo scopo di trarre da un caso semplice conseguenze di carattere generale, consideriamo l'onda risultante dalla composizione di due sole onde piane armoniche non omocromatiche, di uguale ampiezza, polarizzate linearmente allo stesso modo del tipo:

$$(A.3.2) \quad \begin{cases} E_{y1} = A \sin(\omega_1 t - k_1 x), \\ E_{y2} = A \sin(\omega_2 t - k_2 x). \end{cases}$$

Applicando la seguente formula di prostaferesi

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2},$$

l'onda risultante risulta essere

$$(A.3.3) \quad E_y = E_{y1} + E_{y2} = \left[ 2A \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right) \right] \cdot \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right),$$

cioè un'onda la cui pulsazione e la cui fase iniziale sono pari alla media dei valori competenti alle due onde componenti, e la cui ampiezza (la quantità tra parentesi quadre) varia sinusoidalmente con pulsazione e fase iniziale pari alla semidifferenza dei valori competenti alle due onde componenti; il profilo d'onda è rappresentato in Figura a.3.1 dove le linee tratteggiate hanno per equazione l'espressione rappresentante l'ampiezza, cioè rappresentano l'onda di ampiezza.

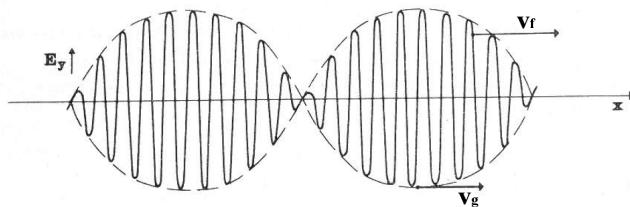


Figura a.3.1

La *velocità di fase*  $v_f$  on cui si propaga la fase  $(\omega_1 + \omega_2)t/2 - (k_1 + k_2)x/2$  vale

$$(A.3.4) \quad v_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2},$$

mentre la *velocità di gruppo*  $v_g$  con cui si propaga l'onda di ampiezza, cioè la velocità con cui si propaga il “gruppo di onde” inviluppato da tale onda vale

$$(A.3.5) \quad v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}.$$

Se si è nel vuoto, in cui la velocità non dipende dalla frequenza, le velocità delle due onde sono uguali e pari a  $c$  e, di conseguenza, sono uguali le due velocità di fase e di gruppo dell'onda risultante. Se invece si è in un dielettrico materiale, le due velocità delle due onde, a causa della dispersione, sono diverse e sono quindi diverse la velocità di fase e di gruppo dell'onda risultante: il massimo del profilo d'onda si propaga con velocità  $v_g$ , mentre l'onda in esso inscritta si propaga con velocità  $v_f$ . È importante osservare che *la velocità di fase è la velocità con cui si spostano i fronti d'onda* (nel caso di un'onda armonica, luogo dei punti in cui la fase istantanea ha il medesimo valore), mentre *la velocità di gruppo è la velocità con cui si propaga l'energia associata alle onde*.

Per generalizzare dal caso particolare considerato, basta supporre che le pulsazioni delle due onde differiscano di una quantità infinitesimale e cioè porre  $\omega_1 - \omega_2 = d\omega$  e, conseguentemente,  $k_1 - k_2 = dk$ ; la (A.3.5) assume quindi la forma

$$(A.3.6) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

#### A.4 Lunghezza di Debye

Consideriamo una carica di prova  $q$  positiva circondata da elettroni in equilibrio termico. Risolvendo l'equazione di Poisson si può determinare il potenziale  $\phi$  risultante, che risulta essere

$$(A.4.1) \quad \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left[\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)(1+Z)^{\frac{1}{2}}\right],$$

dove  $Z$  è il valor medio della carica ionica e  $\lambda_D$  è la *lunghezza di Debye* pari a

$$(A.4.2) \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 K T}{e^2 N}}.$$

È evidente dalla (A.4.1) che per  $r < \lambda_D$  il campo è dovuto alla carica di prova, ma per  $r$  dell'ordine o maggiore di  $\lambda_D$  il campo è sostanzialmente ridotto (schermato) dagli elettroni. Per distanze minori della lunghezza di Debye i campi dovuti a particelle cariche *individuali* sono predominanti e il plasma si comporta come un insieme di particelle non correlate. Al contrario, su grandi distanze il comportamento individuale è schermato dall'azione collettiva

di molte particelle. Infatti, per tali distanze, si può avere solo un comportamento *collettivo*, in cui le particelle si comportano in modo coerente.

Per capire come si arriva alla (A.4.1), si consideri un gas ionizzato con densità uniforme di elettroni liberi  $N$  e di ioni positivi  $N^+$  ionizzati  $Z_i$  volte ( $N=\sum_i Z_i N^+$ ). Se il sistema è in equilibrio termodinamico in un potenziale elettrostatico  $\Phi$ , le cariche si disporranno secondo la *distribuzione di Boltzmann*:

$$(A.4.3) \quad N(\mathbf{r}) = N_0 \exp\left(\frac{e\phi}{KT}\right) \quad N^+(\mathbf{r}) = N_0^+ \exp\left(-\frac{Z_i e\phi}{KT}\right),$$

dove  $N_0$  e  $N_0^+$  stanno ad indicare valori delle densità in assenza di campi ed in condizioni di equilibrio termodinamico. Gli esponenziali in (A.4.3) sono i *fattori di Boltzmann* che danno la probabilità che una carica si trovi in un punto a potenziale  $\phi$  quando il suo moto termico corrisponda ad una temperatura  $T$ . Si introduca ora una carica  $q$  in  $\mathbf{r}=0$ . Il potenziale risultante si otterrà risolvendo l'equazione di Poisson:

$$(A.4.4) \quad \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[ q\delta(r) - eN_0 \exp\left(\frac{e\phi}{KT}\right) + e \sum_i Z_i N_0^+ \exp\left(-\frac{Z_i e\phi}{KT}\right) \right].$$

Linearizzando gli esponenziali per  $e\Phi/KT \ll 1$  (energia termica media delle particelle più grande dell'energia potenziale elettrostatica), si ottiene:

$$(A.4.5) \quad \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[ q\delta(r) - eN_0 \left( 1 + \frac{e\phi}{KT} \right) + e \sum_i Z_i N_0^+ \left( 1 - \frac{Z_i e\phi}{KT} \right) \right];$$

indicando con  $Z$  il valor medio della carica ionica, ed introducendo la lunghezza di Debye (A.4.2), la (A.4.5) diventa

$$(A.4.6) \quad \nabla^2 \phi - \frac{\phi}{\lambda_D^2 (1+Z)^{-1}} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(r),$$

che ha come soluzione

$$(A.4.7) \quad \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left[\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)(1+Z)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Si dice quindi che un **plasma è elettricamente neutro su scale di lunghezza maggiori della distanza di Debye, ossia per  $L \gg \lambda_D$  si ha  $N=N^+$** .

La (A.4.2) ci dice che la lunghezza di Debye dipende da temperatura e densità elettronica; in particolare, se la densità  $N$  è grande,  $\lambda_D$  è piccola e quindi un piccolo spostamento degli elettroni sullo sfondo costituito da ioni, fa sì che si eserciti una forza di richiamo che tende a neutralizzare lo spostamento. Viceversa, per bassi valori di  $N$ ,  $\lambda_D$  è relativamente grande e le cariche sono da considerarsi quasi libere, cioè poco sottoposte ai campi di richiamo generati dalle cariche vicine.

NOTA: la *distribuzione di Boltzmann* è una funzione di distribuzione per gli stati di un sistema. Essa descrive la funzione di distribuzione per la frazione di particelle  $N_i/N$  che occupa uno stato  $i$ -esimo con energia  $E_i$ :

$$(A.4.8) \quad \frac{N_i}{N} = \frac{g_i \exp\left(\frac{-E_i}{KT}\right)}{\sum_i g_i \exp\left(\frac{-E_i}{KT}\right)},$$

dove  $N=\sum_i N_i$  è il numero totale di particelle e dove  $g_i$  è il numero di stati aventi energia  $E_i$ . Il termine  $\exp(-E_i/KT)$ , che indica la probabilità relativa, non normalizzata, di un singolo stato, è chiamato *fattore di Boltzmann* e appare spesso nello studio dei processi fisici e chimici.